

**Zum Neutrinofluss aus der Annihilation
von dunkler Materie
aus Richtung der nördlichen Hemisphäre**

von

Sebastian Kazarski

Bachelorarbeit in Physik

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im August 2010

angefertigt am

III. Physikalischen Institut B

bei

Professor Dr. Christopher Wiebusch

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Strukturbildung	3
2.1	Evolution des Universums	3
2.2	Dunkle Materie	4
3	Dunkle Materie	5
3.1	Klumpung aus dunkler Materie	5
3.1.1	Klumpung auf kleinen Skalen	5
3.1.2	Klumpung auf großen Skalen	9
3.1.3	Vergleich	9
3.2	Zerstörung und Überlebenswahrscheinlichkeiten von geklumpfter Materie	9
3.2.1	Grundlagen	10
3.2.2	Zerstörung von geklumpfter Materie in der hierarchischen Clusterbildung	10
3.2.3	Zerstörung von geklumpfter Materie durch die Galaktische Scheibe	11
3.2.4	Zusammenfassung und Vergleich	12
3.3	Verteilung der Klumpung im galaktischen Halo	12
3.3.1	Verteilung der Klumpung auf kleinen Skalen	13
3.3.2	Verteilung der Klumpung auf großen Skalen	17
3.4	Annihilationssignal aus klumpender dunkler Materie	18
3.4.1	Allgemeine Grundlagen für die Berechnung des Annihilationssignals	18
3.4.2	Annihilationssignal durch die Klumpung auf kleinen Skalen	21
3.4.3	Annihilationssignal durch die der Klumpung auf großen Skalen	22
3.4.4	Annihilationssignal durch ungeklumpte dunkle Materie	22
3.4.5	Neutrinosignal aus dunkler Materie	23
3.4.6	Ergebnisse und Diskussion	23
4	Vergleich mit experimentellen Daten des IceCube-22	26
4.1	Grundlagen	26
4.2	Berechnung	27
4.3	Vergleich	30
4.4	Theoretische Berechnung der “Ereignisringe bzw. sichtbaren Segmente”	32
4.5	Ergebnisse	34
5	Zusammenfassung	36
6	Literatur	37

1 Einleitung

Wenn heutzutage, in einen klaren Nachthimmel geblickt wird, kommen sicherlich bei einigen Menschen die Fragen auf: Wie groß ist das, was ich dort sehe, wo befinde ich mich wirklich in diesem so genannten “Universum” , woraus besteht all dies und wie ist es entstanden.

Vor etwa 13,7 Milliarden Jahren begann die Expansion des Universums mit dem Urknall “Big Bang” nach einigen heutigen Theorien aus einer Singularität und hat sich anschließend in Bruchteilen von Sekunden weiterentwickelt bzw. verändert. Innerhalb von einer Minute haben sich die Grundbausteine der heute nachweisbaren Materie (Quarks, Leptonen) gebildet. Nach schließlich etwa hundert Sekunden haben sich die Elementarteilchen, durch die bereits entstandenen Elementarkräfte (starke Kraft, schwache Kraft), zu ersten Atomen verbunden. Ab 1 Mrd. Jahren nach dem Urknall haben sich aus Dichteschwankungen, Gaswolken gebildet woraus sich wiederum die ersten Sterne entwickeln konnten. Durch die dadurch wachsenden lokalen Gravitationsfelder entstand das uns heute bekannte Universum.

Wir befinden uns in einer von unzähligen Galaxien, die als Milchstraße bezeichnet wird. Die Milchstraße ist eine Art Spiralgalaxie und besteht aus Untersystemen wie unser Sonnensystem und vielen Sternen, die sich um das Galaktische Zentrum bewegen. In diesem Fall handelt es sich um eine etwa 1 kpc dicke Scheibe in der die meisten Sterne sichtbar sind. Dieser Bereich ist als langgestreckte Fläche am Himmel zu erkennen. Für eine Veranschaulichung dieses Galaxietyps und der Größenverhältnisse unserer Milchstraße dient die folgende Skizze.

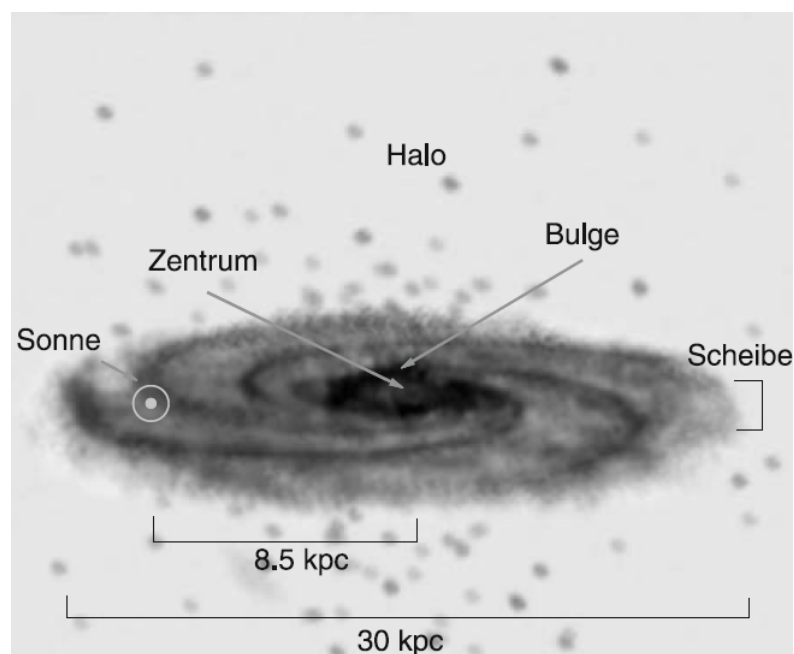


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Galaxie (Milchstraße). In der Mitte befindet sich das Zentrum, welches von dem “Bulge” umgeben wird. Um das Zentrum rotiert die Galaktische Scheibe, in der sich unser Sonnensystem in einem Radius von $8,5\text{ kpc}$ befindet [1].

Darin wird deutlich, dass wir uns in einem Abstand von $8,5\text{ kpc}$ befinden. Das Zentrum ist von einem so genannten “Bulge” umgeben, dieser kann als runde Aufwölbung bezeichnet werden. Der gesamte Durchmesser der Galaxie beträgt $32\text{--}30\text{ kpc}$. Sphärisch um die Galaktische Scheibe herum haben sich Anhäufungen von Sternen gebildet. Die Spiralarme werden durch neu entstandene leuchtkräftigere Sterne ausgeprägt und sichtbar. Dieses gesamte daraus entstandene Gebilde wird “Halo” genannt und im Weiteren häufiger verwendet. Die Scheibe rotiert um das Galaktische Zentrum, wobei die Geschwindigkeiten von ihr an verschiedenen Punkten r vom Mittelpunkt unterschiedlich sind. Mit Hilfe von Newtons Gleichungen, die aus der Mechanik bekannt sind, lässt sich die Rotationsgeschwindigkeit von Objekten in der Scheibe im Abstand vom Zentrum berechnen. Somit wird der theoretisch erwartete Wert für unser Sonnensystem ermittelt. Dieser beträgt etwa 160 km/s , jedoch hat sich durch Beobachtungen eine weitaus größere von 220 km/s herausgestellt. Für andere Rotationsgeschwindigkeiten von dem Abstand zum Zentrum dient die folgende Abbildung (2). Darin ist dieses Phänomen deutlich zu erkennen [1, 2].

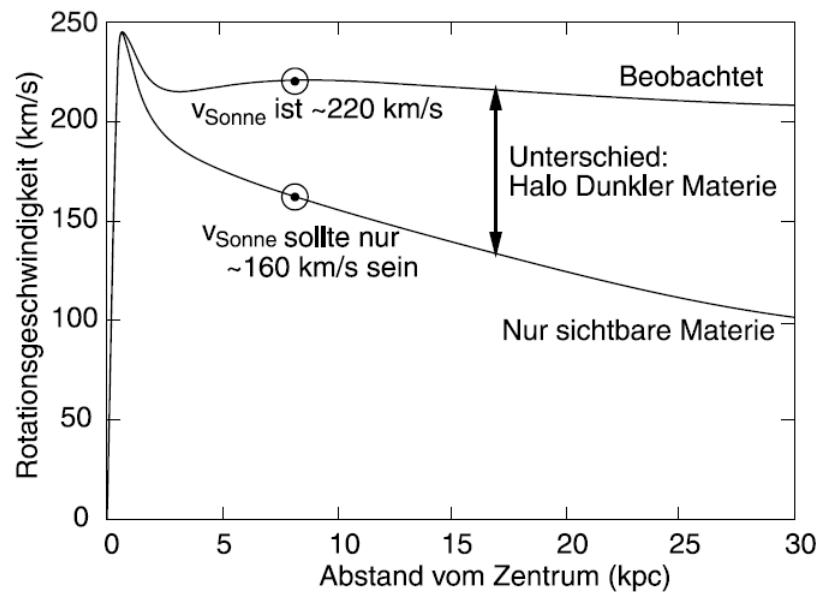


Abbildung 2: Die obere Kurve beschreibt die beobachteten Werte der Rotationsgeschwindigkeit im Abstand vom Galaktischen Zentrum. Die untere dagegen das theoretisch erwartete Ergebnis. Zusätzlich sind konkrete Zahlenwerte für den Fall unseres Sonnensystems angegeben [1].

In der Abbildung (2) sind die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment (Beobachtung) gut verdeutlicht. Da die beobachteten Geschwindigkeiten höher sind, scheint mehr Masse vorhanden zu sein, als von der Masse der in der Milchstraße registrierten Sterne vorhanden ist. Diese zusätzliche Masse wird als Masse aus “dunkler Materie” (nicht sichtbare Materie) bezeichnet. Ein anderer Anhaltspunkt für die Existenz wird durch den Gravitationslinseneffekt beschrieben. Dieser besagt, dass Licht in einem Gravitationsfeld abgelenkt wird. Deshalb werden bei Beobachtungen von Galaxien Lichtbögen registriert. Ist das Zentrum, an dem es zur Lichtkrümmung kommt, nicht sichtbar, so muss es sich dabei um dunkle Materie handeln, wodurch das Gravitationsfeld zustande kommt. Leider konnten bis jetzt noch keine eindeutigen Beweise dargelegt werden, woraus diese Form der Materie wirklich besteht. Zu den möglichen dunklen Materieteilchen zählen Teilchen, die schwach miteinander wechselwirken. Wie zum Beispiel das “WIMP” (weakly interacting massive particle). Dieses Teilchen besteht aus nicht baryonischer Materie, ist sehr massereich, elektrisch neutral und hat eine lange Lebensdauer. Nach heutigen Analysen wird deutlich, dass aus Regionen in denen dunkle Materie vermutet wird, ein Überschuss von uns bereits bekannten Teilchen aus dem Standard Modell beobachtet werden können. Aus diesem Grund kann also davon ausgegangen werden, dass aus dunklen Materieteilchen, Teilchen des Standard Modells entstehen. Mit anderen Worten ausgedrückt, vernichten sich dunkle Materieteilchen (annihilieren), analog zum Annihilationsprozess des Elektrons und Positrons. Die dabei zu einem großen Teil entstehenden Teilchen sind Neutrinos, Elektronen sowie Positronen oder Gamma Strahlen. In dieser Arbeit wird die Verteilung der dunklen Materie in unserer Galaxie, nachweisbar durch Neutrinos, untersucht. Da das Universum zu Beginn der Evolution eine relativ homogene Dichteverteilung aufgewiesen hat und dies zum heutigen Zeitpunkt nicht mehr der Fall zu sein scheint, wird dieses Problem auf die daraus resultierende neuartigen inhomogenen Dichteverteilungen im Universum bezogen. Aufgrund dieser inhomogenen Verteilungen ist ersichtlich, dass es zu einer Art “Klumpung” der dunklen Materie kommen kann. Diese stärker in einem Bereich angehäufte dunkle Materie kann dabei auf ein nur sehr kleines aber dafür sehr viel dichteres Volumen komprimiert sein. Dennoch gibt es auch Anzeichen von dem Gegenteil, also das sie ein relativ großes und weniger dichtes Volumen einnimmt. In diesen Fällen kann durchaus davon ausgegangen werden, dass das detektierbare Signal von Teilchen die durch Annihilationen aus geklumpeter dunkler Materie verursacht wird, anders ist als das durch homogen verteilte dunkle Materie hervorgerufene. Diese möglichen Unterschiede bezogen auf die dunkle Materie sollen in dieser Arbeit theoretisch untersucht und anschließend miteinander verglichen werden. Abschließend werden diese Annahmen mit Ergebnissen von Neutrinoaufnahmen des IceCubes Detektors, in der nördlichen Hemisphäre, analysiert.

2 Strukturbildung

In diesem Kapitel wird versucht die grundlegenden Vorgänge bei der Entwicklung des Universums, angefangen zur Zeit des Urknalls bis zum heutigen Zeitpunkt, darzustellen.

2.1 Evolution des Universums

1929 wird von Edwin Hubble eine der wahrscheinlich bedeutendsten Entdeckungen der heutigen Zeitepoche gemacht. Bei der Untersuchung des Universums ist ihm deutlich geworden, dass sich Galaxien voneinander entfernen. Somit hat er das uns heute bekannte Hubble-Gesetz motivieren können. Dabei ist die Geschwindigkeit proportional zum Abstand der jeweiligen Galaxien, sowie zur Hubble Konstante: $v = H_0 l$. Die Konstante H_0 liegt im Bereich von $(55 - 75) \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ [2, 3].

Der besondere Erfolg dieses Zusammenhangs liegt darin, dass der damit berechenbare Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Abstand, mit den Vorhersagen von Einsteins Allgemeinen Relativitätstheorie (ART), übereinstimmen. Deshalb ist es nun möglich gewesen die Gleichungen der ART in der Zeit rückwärts laufen zu lassen, angefangen bei der heutigen Zeit. Somit wird schließlich die Situation des Urknalls vorhergesagt. Mit Hilfe dieser Erkenntnisse kann nun die Evolution des Universums bis zur heutigen Zeit mit denen uns bekannten physikalischen Grundgleichungen, simuliert werden. Dies ist das so genannte "Urknall-Modell", dass in der folgenden Abbildung anschaulich gezeigt wird.

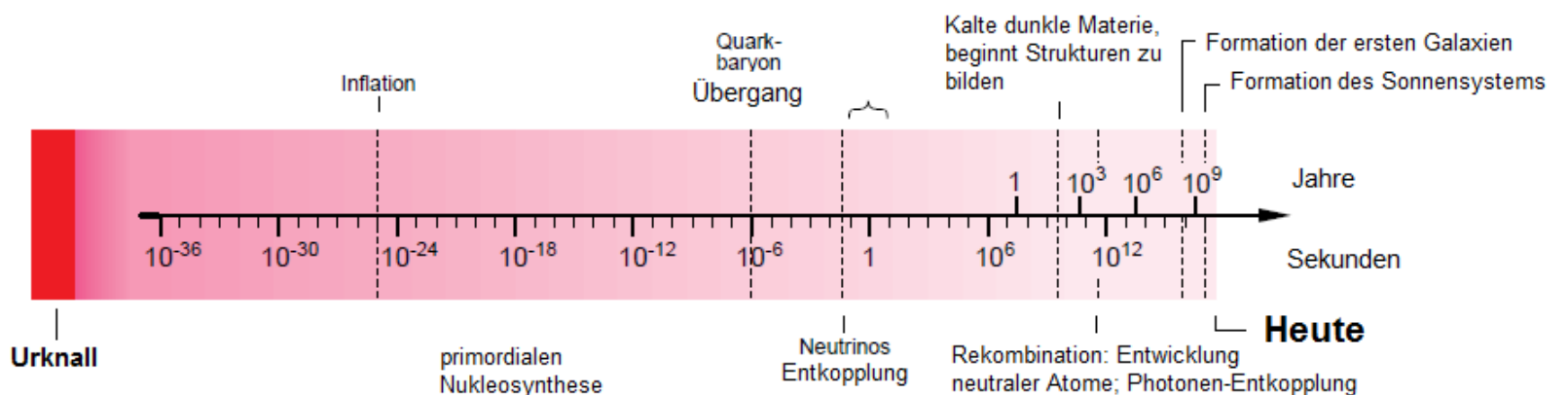


Abbildung 3: Urknall-Modell, dargestellt als Zeitlinie von dem Urknall bis heute [2].

Es wird also deutlich, dass das Universum aus einem unendlich dichten und heißen Zustand, einer Singularität entstanden ist. Anschließend ist es zu einer überaus rasanten Abkühlung und Ausdehnung gekommen. Nach 10^{-30} Sekunden haben sich Leptonen, Quarks sowie Eichbosonen geformt. Im Bereich der Mikrosekunden nach dem Urknall haben sich daraus Protonen sowie Neutronen entwickelt. Ab etwa einer Sekunde, in der Phase der primordialen Nukleosynthese, konnten sich diese Grundbausteine nun durch wachsende gravitative Kräfte und Fusionen zu ersten leichten Atomkernen verbinden. Dazu zählt zunächst der Deuterium-Kern, anschließend der Tritium-Kern und schließlich der Helium-3-Kern. In darauf folgenden Reaktionen sind Wasserstoff-, Helium-4- und Lithium-7-Kerne entstanden. Diese sechs Atomkerne sind die einzigen uns heute bekannten, die in dieser frühen Entwicklungsphase entstehen konnten. Diese Zeitepoche endet etwa drei Minuten nach dem Urknall. Das Universum ist nun noch sehr heiß gewesen und beinhaltet sehr viel geladene Materie mit einer hohen Rate an Hintergrundstrahlung von Photonen. Dies ist der Zeitpunkt an dem es zu einem thermischen Gleichgewicht zwischen Strahlung und Materie gekommen ist. Die anschließende Zeitepoche wird Rekombination genannt und findet etwa zehntausend Jahre nach dem Urknall statt in dem sich Helium und andere oben genannte Kerne mit Elektronen verbinden und Atome bilden. In dieser Evolutionsphase herrscht eine Temperatur von etwa 3000K und es kommt zur Entkopplung von Strahlung und Materie, sodass das Universum für elektromagnetische Strahlung transparent werden konnte, d.h. sie können sich nun ungehindert ohne Wechselwirkung bewegen. Ab diesem Moment, muss die weitere Entwicklung von Strahlung und Materie getrennt

betrachtet werden. Es wird deshalb in der Literatur (und auch in dieser Arbeit) von einer “materiedominanten” bzw. “strahlungsdominierten Phase” gesprochen. Ein Teil dieser elektromagnetischen Strahlung ist in dem heutigen Universum noch vorhanden. Bekannt durch den Aspekt der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB). Der Unterschied zwischen der primordialen und heutigen Strahlung liegt in der Wellenlänge, der heutzutage im Mikrowellenbereich zu finden ist. Aufgrund der weiteren Expansion des Universums von dem Zeitpunkt der Entkopplung zwischen Strahlung und Materie bis heute, ist sehr viel Energie umgewandelt bzw. verbraucht worden und somit hat auch die anfängliche Photonenenergie abgenommen. Dies impliziert wiederum eine Abnahme der Frequenz und somit einen Anstieg der Wellenlänge.

Dies klingt soweit plausibel, aber um die genaue Entstehung der Epochen in sehr kleinen Zeitintervallen von 10^{60} Planckzeiten (10^{-43} s) nach dem Urknall verstehen zu können, müssen neue physikalische Theorien aufgestellt werden. In diesem Fall wird von der Inflationstheorie gesprochen, die Epoche in der diese Theorie zum Einsatz kommt, wird inflationäre Phase genannt und hat vor der Epoche der Entkopplung von Strahlung und Materie stattgefunden. In dieser Phase expandiert das Universum exponentiell um einen Faktor 10^{43} innerhalb von 10^{-32} Sekunden, es ist also offensichtlich, dass dieses Evolutionsintervall sehr viele Informationen über die fortschreitende Entwicklung haben muss. Des Weiteren lässt sich dadurch erklären, dass durch Quantenfluktuationen der Urknall schließlich ausgelöst wurde, wodurch sich ein fundamentaler Mechanismus von Dichtefluktuationen für die weitere Strukturbildung gebildet hat [1, 2, 15].

2.2 Dunkle Materie

Dunkle Materie ist eine neue Form von Materie und nach dem heutigen Wissenstand bestehen etwa 24% der Materie des Universums aus dieser nicht baryonischen Materie. Bei der Strukturbildung muss zwischen zwei Formen von dunkler Materie unterschieden werden. Zum einen der heißen dunklen Materie und zum anderen der kalten. Diese Aufteilung basiert auf den Zufallsgeschwindigkeiten der dunklen Materieteilchen wenn sie das thermischen Gleichgewicht verlassen. In diesem Fall sind sie von einer Art Wärmebad durch Photonen umgeben. Das heißt sie können relativistische aber auch nicht relativistische Geschwindigkeiten erreichen. Haben die dunklen Materieteilchen eine relativistische Geschwindigkeit so sind dies heiße dunkle Materieteilchen, bewegen sie sich dagegen sehr viel langsamer so ist dies charakteristisch für kalte sehr massereiche dunkle Materieteilchen.

Im Gegensatz zu nicht relativistischen dunklen Materieteilchen, werden relativistische nicht in einem durch eine größere Dichtekonzentration hervorgerufenen Potentialtopf, gravitativ gebunden. Stattdessen können sich diese frei im Raum bewegen und zerstören eine solche Dichteanhäufung, wenn sie für diese Überdichte verantwortlich sind. Dies impliziert somit, dass heiße dunkle Materie keine Dichtestörungen auf kleinen Skalen bilden kann. Da sich nicht relativistische Teilchen vergleichsweise relativ langsam bewegen ist es möglich das also kalte dunkle Materie einer Dichtekonzentration gravitativ unterliegt und schließlich “zusammenklumpt”. Die Strukturbildung erfolgt somit ähnlich, wie ein handgeformter Schneeball, der eine Steigung herunterrollt und bei jeder Umdrehung mit dem überrollten Schneeanteil wächst. Das heißt große Klumpungen entstehen aus kleineren und dementsprechend zu einer sehr viel späteren Zeit. Dies wird als hierarchische Strukturbildung bezeichnet. Für das Verständnis dieser Effekte wird ein so genannter “relativer Dichtekontrast δ ” als Quotient aus Dichtefluktuationen $\Delta\rho$ und der mittleren kosmischen Materiedichte ρ zur Zeit t , definiert: $\delta = \Delta\rho/\rho$. Kommt nun in einem Gebiet eine Dichtefluktuation mit $\Delta\rho > 0$ zustande, so wird das dort vorherrschende Gravitationsfeld stärker als das im kosmischen Mittel. Deshalb kommt es dazu, dass dieser Bereich sehr viel langsamer expandiert, als das übliche Gebiet. Dementsprechend wird die Dichte in diesem Gebiet auch langsamer abnehmen und somit steigt der Dichtekontrast. Die unmittelbare Konsequenz ist nun offensichtlich, denn die relative Dichte wird ebenfalls anwachsen und ein noch stärkeres Gravitationsfeld verursachen. Dichtefluktuationen wachsen also zeitlich, aufgrund ihrer Selbstgravitation an. Insgesamt muss dieses Modell als statistisches Ensemble von Universen mit Dichtefeldern, die gleiche statistische Eigenschaften aufweisen, angesehen werden. Dieses Ensemble wird als “Zufallsfeld” bezeichnet, welches mit einem Leistungsspektrum $P(k)$ beschrieben wird, mit Wellenzahl k . Anschaulich sind Zufallsfelder als Wellen auf einer Wasseroberfläche vorstellbar, weshalb eine Beschreibung mit einer Proportionalität zur Wellenzahl naheliegt. Aufgrund der bereits oben angedeuteten extremen Expansion des Universums in der inflationären Phase, sind mikroskopische Skalen in makroskopische übergegangen.

Große Strukturen im heutigen Universum entsprechen demnach mikroskopischen Skalen in der Phase der Inflation. Die heutzutage beobachtete inhomogene Materieverteilung ist nun mit Hilfe der Quantenmechanik erklärbar. Denn nach der Heisenbergschen Unschärferelation unterliegt die Materie kleinen Quantenfluktuationen. Durch die Inflation werden diese nun zu großen Dichtefluktuationen [1, 13, 14, 16].

3 Dunkle Materie

3.1 Klumpung aus dunkler Materie

Wie schon in dem letzten Kapitel angedeutet, hat sich im Laufe der Evolution eine so genannte Klumpung, die aus dunkler Materie besteht, gebildet. Von dieser Klumpung gibt es wiederum verschiedene Arten:

- Klumpung auf kleinen Skalen
- Klumpung auf großen Skalen.

Die Eigenschaften und Unterschiede der verschiedenen Klumpungen werden nun genauer beschrieben. Begonnen wird mit der kleineren Skala, anschließend wird die Klumpung einer größeren Massen und Längenskala untersucht. Bei der Entwicklung wird zwischen zwei verschiedenen bereits angesprochenen Szenarien unterschieden: der materiedominierenden Epoche und der strahlungsdominierten Phase.

3.1.1 Klumpung auf kleinen Skalen

Diese Art der Klumpung hat sich in einer sehr frühen Entwicklungsphase des Universums aus kalter dunkler Materie gebildet. Dementsprechend auch vor derjenigen auf großen Skalen, aber dazu später mehr. Durch Gravitationskräfte zwischen den einzelnen Materieteilchen kommt es zu einer Anhäufung und schließlich zu einer Art Klumpung [3]. Dieses Phänomen lässt sich also als eine Form von Klumpen verstehen. Größtenteils können sie durch das Anwachsen von adiabatischen und isothermischen Fluktuationen in der materiedominierten Epoche entstanden sein. Des Weiteren spielen bei der Entwicklung so genannte Dichtefluktuationen in Modellen mit topologischen Defekten eine große Rolle. Topologische Defekte sind Phänomene bei denen es sich um eine spontane Brechung der Symmetrie handelt [4]. Das wohl wichtigste Beispiel für diesen Prozess ist der “Higgs- Mechanismus”, bei dem Teilchen der schwachen Wechselwirkung bei vorhandener Symmetrie masselos sind, aber bei gebrochener eine endliche Masse besitzen. Andere Beispiele sind bei Festkörpern zu finden, dort ist dies beispielsweise die Magnetisierbarkeit eines Ferromagneten [4].

Formation

Die eigentliche Formation der Klumpung auf kleinen Skalen kann nur auftreten, wenn die Amplituden der Dichtefluktuationen groß genug auf der korrespondierenden Skala sind. Um dies genauer verstehen zu können, muss hier zunächst das “Leistungsspektrum”, bekannt aus der “Press-Schechter” Theorie, eingeführt werden [5]:

$$P(k) \propto k^{np} \tag{1}$$

$P(k)$ beschreibt die statistischen Eigenschaften des Universums, und somit dessen Struktur. Anders ausgedrückt, ist es somit möglich, die Größe der Struktur auf einer Längenskala von $L = 2\pi/k$, zu untersuchen [1]. k repräsentiert hier eine Wellenzahl. Je größer der Wert von $P(k)$ ist, desto größer ist auch die Amplitude der Fluktuation auf der Längenskala von $2\pi/k$. Die Berechnung des Leistungsspektrums folgt aus der Zerlegung der Dichtefluktuationen δ in eine Summe von ebenen Wellen mit Wellenvektor k und Amplitude a_k : $\delta(\vec{x}) = \sum a_{\vec{k}} \cos(\vec{x} \cdot \vec{k})$. Mit $P(k)$ lässt sich somit die Verteilung der Amplituden mit gleichem $k = |\vec{k}|$ beschreiben. Mathematisch gesehen wird hier auf eine Fouriertransformation zurückgegriffen. Zur Verdeutlichung des Leistungsspektrums ist das Beispiel von Wellen auf einer Wasseroberfläche geeignet. Demnach würde sich eine charakteristische Wellenlänge L_x beispielsweise durch den Einfluss von Wind ergeben. Das Leistungsspektrum würde dann ein Maximum bei $k = 2\pi/L_x$ aufweisen. Da es während der frühen Expansionsphase des Universums keine natürliche Längenskala zum Vergleich mit Wellenlängen

gegeben hat, wird Gleichung (1) verwendet. Dieses Potenzgesetz enthält keine charakteristische Skala, hängt aber von der Wellenlänge ab. Deshalb ist n_p in diesem Fall der Parameter für die Größenordnung der Skala. Das heißt konkret bei der “kleinen Skala”, beträgt n_p ungefähr 1. Dieses Spektrum wird als “Harrison-Zeldovich-Spektrum” bezeichnet [1, 3, 13, 14]. Wenn n_p jedoch größer als 1 ist, hat sich die Klumpung in einem weiten Skalenspektrum geformt. Die Formationszeit dieser Strukturen aus dunkler Materie lässt sich nach [3] wie folgt berechnen:

$$t = \left(\frac{\kappa \rho_{eq}}{\rho} \right) t_{eq}, \quad (2)$$

dort ist $\kappa = 18\pi^2$, $\rho_{eq} = \rho_0 (1 + z_{eq})^3 = 1,9 \cdot 10^{-29} \Omega_m h^2 g \cdot cm^{-3} \cdot (2,35 \cdot 10^4 \Omega_m h^2)^3$ gibt den Wert einer kosmologischen Dichte, zum Zeitpunkt als die beiden oben genannten Epochen (materie- und strahlungsdominierende) gleiche Werte hatten. Dieser Zeitpunkt wird als t_{eq} bezeichnet. Die Dichte ρ in Gleichung (2) wird durch [3]:

$$\rho = \kappa \rho_{eq} \left(\frac{\nu \sigma_{eq}(M)}{\delta_c} \right)^3, \quad (3)$$

berechnet. $\sigma_{eq}(M)$ gibt die Fluktuationsdispersion auf einer Massenskala M zur Zeit t_{eq} an und δ_c ist ungefähr 1,67 [3, 5]. ν zeigt die Bezeichnung für die verschiedenen, Peakhöhen der Dichtefluktuationen. Mit:

$$\nu = \frac{\delta_{eq}}{\sigma_{eq}}. \quad (4)$$

Wie in Gleichung (3) zu sehen ist, kann die Klumpung ebenfalls, wie dunkle Materie Halos, durch die Dichte und somit auch durch Dichteprofile beschrieben werden. Durch theoretische Untersuchungen und numerische Simulationen [5, 6], wird gezeigt, dass diese Dichteprofile eine ähnliche Form wie Halodichteprofile aufweisen. Das heißt der Dichteverlauf im Abstand vom Klumpungszentrum nimmt ab und ist somit proportional zu $r^{-\beta}$. β nimmt dabei Werte im Bereich von 1,5 bis 2,0 an und beschreibt die Potenz des Profils. Diese wird durch Simulationen ermittelt. Der Verlauf der Dichte in Abhängigkeit von r wird in dem nächsten Abschnitt genauer untersucht. Jede Art der Klumpung aus dunkler Materie hat natürlich verschiedene Massen und somit auch verschiedene minimale Massen. Der Prozess bis zum Erreichen der maximal minimalen Masse lässt sich dadurch erklären, dass ein gewisser Anteil von dunkler Materieteilchen in der Lage ist sich aus der Klumpung zu lösen und diese zu verlassen. Dieser Prozess des Massenverlustes kommt durch folgende drei Verlustmechanismen zustande: freies Ausströmen der Teilchen, Kollisionsdämpfungen der Teilchen und durch die jeweilige nötige Temperatur zum Abkoppeln der Teilchen. Mit Hilfe dieser Bedingungen lässt sich ein Bereich der minimalen Masse für die Art von Klumpen, in einem Bereich von $10^{-12} M_\odot$ bis $10^{-7} M_\odot$ angeben [3, 5, 6].

Dichteprofile von kleinen Klumpen

Für die spätere Berechnung des Annihilationssignals, dass durch die Vernichtung von dunkler Materieteilchen innerhalb der dunklen Materieklumpung auftritt, wird das Dichteprofil der verschiedenen Klumpungen benötigt. Während der Evolution kann es im Zentrum zu einer Formung von so genannten Singularitäten kommen. Solche Phänomene treten beispielsweise auf, wenn der innere Bereich einer Klumpung, aufgrund der im Inneren wirkenden Gravitationskraft in sich zusammenstürzt. Diese Region muss man sich so vorstellen, dass sie in einem Volumen mit Oberfläche eingeschlossen ist. Durch den Zusammensturz schrumpfen diese beiden Eigenschaften auf Null, sodass die Materie dementsprechend komprimiert wird und die Dichte sowie die Krümmung der Raumzeit unendlich werden [7]. Andererseits kann sich aber auch ein Kern mit einem berechenbaren Radius entwickeln. In diesem Fall würde sich vom absoluten Zentrum der Klumpung bis zum Ende des Kernradius eine konstante Dichtentwicklung ergeben, sozusagen eine Unterbrechung der weiteren Dichtezunahme für r gegen 0 [3, 5, 6].

Entstehung des Kerns

Durch Gezeitenkräfte zwischen Teilchen aus dunkler Materie innerhalb der Klumpung kommt es zu einer Verschmierung des Dichteprofiles. Die Gezeitenkräfte wirken sozusagen als eine Art Störung. In dem materiedominierten Epoche wachsen die Dichtestörungen proportional zu Zeit $t^{3/2}$, diese sind gleichzeitig proportional zur Dichtefluktuation δ .

In dem nichtlinearen Bereich mit δ größer gleich 1, entwickelt sich eine Instabilität (Unterbrechung) des Flusses der Teilchen, wodurch sich das primäre Dichteprofil formt [4].

Da sich die Teilchen in einem Klumpen um ein konzentriertes Dichtezentrum (Kern) bewegen, werden sie aufgrund der wirkenden Gravitationskräfte auf einer Kreisbahn gehalten, analog zur Planetenbewegung in der Galaxie. Wenn nun die Bewegungsbahnen der einzelnen dunklen Materieteilchen im Zentrum durch Dichteschwankungen gestört werden, reduzieren sich die jeweiligen Geschwindigkeiten [4]. Dadurch kommt es zu einer Abweichung von der radialen Umlaufbahn, das heißt zu einer Umstürzung des Teilchenflusses. Somit kann sich keine Singularität entwickeln und das Dichteprofil wird “verschmiert”. Deshalb setzt sich die totale Geschwindigkeit der Teilchen aus zwei Komponenten zusammen. Einem Term für die radiale Geschwindigkeitskomponente v_{rad} und einem zusätzlichen v_{tid} , der eine kleine Korrektur, verursacht durch die Gezeitenkräfte, beschreibt. Wenn sich bereits eine Singularität gebildet hat, kann diese nicht mehr zerstört werden [4].

Die Formation des Kerns beginnt in der linearen Phase der Evolution des Universums und wird zu Beginn der nicht-linearen Phase fortgesetzt. Innerhalb des Kerns nehmen die Gezeitenkräfte mit der Zeit t ab, weshalb die Dauer dieses Prozesses auch proportional zu t ist. Der sich entwickelte Kern hat eine Größe von $x_c \sim 0,01$ und kann in der weiteren Evolution nicht mehr zerstört werden. Anders ausgedrückt, wird die Phase der Kernformation etwa ab t_{eq} fortgesetzt und erreicht eine maximale Größe bei t_s , wenn ein Klumpen von der Expansion des Universums unabhängig ist und sich im nicht linearen Bereich weiterentwickelt. Nachdem die Klumpungen diese Zeitepoche überwunden haben, kommen sie in die hierarchische Strukturbildungsphase. In dieser Phase können sie nun durch Gezeitenkräfte zerstört werden. Dennoch überleben wiederum einige diese Phase und behalten den bereits entwickelten Kern.

Berechnung des Kerns

Der Kernradius R_c kann als minimale Abweichung der typischen Teilchenbahn von dem Zentrum des Klumpens definiert werden. Vorzugsweise wird das Verhältnis x_c aus Klumpenkernradius und Klumpenradius bestimmt. Da sich diese Größe auch mit Hilfe von Störungen des Geschwindigkeitsfeldes der dunklen Materieteilchen durch kosmologische Dichtestörungen motivieren lässt, folgt nach [4].

$$x_c \simeq \delta_{eq}^3, \quad (5)$$

hierbei beschreibt δ_{eq} die anfängliche Dichtefluktuation am Ende des strahlungsdominierten Epoche. Anders lässt sich dieses Verhältnis durch:

$$x_c = \frac{R_c}{R} = 0,3 \cdot \frac{f^2(\delta_{eq})}{\nu^2}, \quad (6)$$

berechnen. Die Funktion $f(\delta_{eq})$ wird aus Simulationen motiviert und ist gegeben durch [4]:

$$f(\delta_{eq}) = \frac{2}{3} \int_{\left(\frac{5\delta_{eq}}{3}\right)^{\frac{1}{3}}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \left(\phi - \frac{1}{2} \sin(2\phi) \right)^{-\frac{4}{3}} \sin^4(\phi) \quad (7)$$

Für $\delta_{eq} \rightarrow 0$ geht $f(\delta_{eq}) \rightarrow 1,32$. Vereinfacht wird als Näherung dieser Funktion häufig $f(\delta_{eq}) \sim 1$ verwendet. Damit folgt aus obiger Gleichung für x_c :

$$x_c \simeq 0,3 \cdot \frac{1}{\nu^2} \quad (8)$$

Die Variable ν beschreibt in diesen Formeln die Peakhöhen der Dichtefluktuation. Für diese Größe gibt es verschiedene Größenbereiche mit unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften bezogen auf die Klumpung der dunklen Materie [4]:

- für $\nu \sim 0,5 - 0,6$ beträgt der relative Kernradius $x_c \sim 1$, in diesem Fall werden alle Klumpungen durch Gezeitenkräfte zerstört,
- für $\nu \sim 1,6$ überlebt ein großer Teil $x_c \sim 0,01$,

- für $\nu \sim 2,5$ ist $x_c \sim 0,01 - 0,05$, Klumpungen mit solch einem relativen Kernradius tragen mit dem größten Anteil zum Annihilationssignal bei und sind heutzutage größtenteils vorhanden.

Berechnung der Dichte

Aus den obigen Überlegungen lässt sich nun eine Formel für den Verlauf der Dichte innerhalb einer Klumpung motivieren. Dazu werden drei Bereiche betrachtet. Im Inneren des Kerns, zwischen Kernradius und Klumpungsradius und der Bereich außerhalb des Objekts [4]:

$$\rho_{int}(r) = \begin{cases} 0 & r > R \\ \rho_c \left(\frac{r}{R_c}\right)^{-\beta} & R_c < r < R \\ \rho_c & r < R_c \end{cases} \quad (9)$$

Die Kerndichte ρ_c lässt sich nach [4, 8] mit:

$$\rho_c = \frac{\bar{\rho}}{3x_c^2}. \quad (10)$$

ermitteln. Darin beschreibt $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$ die mittlere Dichte der Klumpung. Mit dieser Verteilung kann nun auch die Masse einer Klumpung berechnet werden, dies geschieht mit Hilfe des Integrals über die Dichte [4]:

$$M = 4\pi \int dr r^2 \rho_{int}(r). \quad (11)$$

Für verschiedene Werte von β ($1,5 \leq \beta \leq 2,0$) und typische Werte einer solchen geklumpten Anhäufung von dunkler Materie, wird in der folgenden Skizze das verschiedene Dichteverhalten gezeigt:

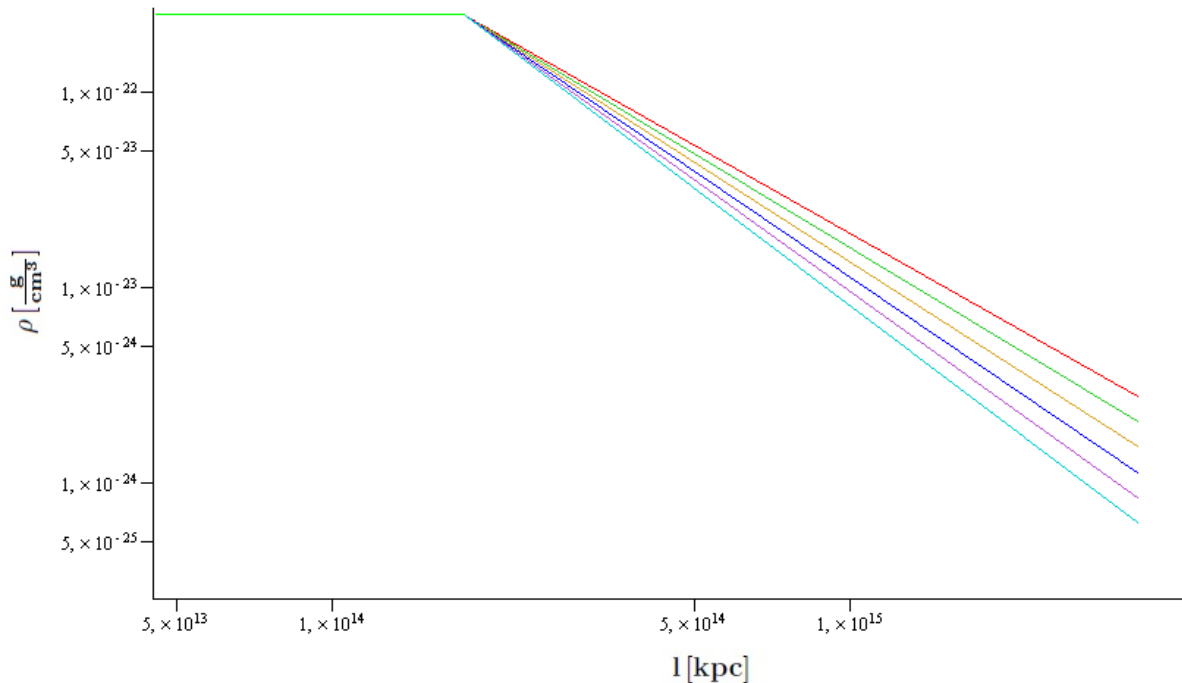


Abbildung 4: Doppellogarithmische Auftragung des Dichteprofiles der Klumpung für verschiedene Werte von $1,5 \leq \beta \leq 2,0$, im Abstand vom Zentrum des Klumpens.

In Abbildung (4) wird im Bereich $r < R_c$ der konstante Verlauf der Dichte deutlich. Nach dem Erreichen des Kernradius sind die verschiedenen Steigungen durch den Parameter β zu erkennen. Außerhalb der Klumpung ist die Dichte null. Der Radius der Klumpung ist proportional zu der Masse und antiproportional zu dessen Dichtefluktuationspeakhöhe ν lässt sich nach [5] mit:

$$R \simeq 1,5 \cdot 10^{16} \left(\frac{1}{10^{-6}} \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2,5}{\nu} \right) cm$$

berechnen.

3.1.2 Klumpung auf großen Skalen

Die Klumpung auf großen Skalen kann durch das hierarchische Szenario erklärt werden. In diesem Szenario verschmelzen kleinere Halos zu größeren, wodurch diese Art von Klumpung entsteht. Die Klumpung auf großen Skalen besteht also aus Tausenden von kleineren und bildet so genannte "Cluster". Viele von diesen Klumpungen können in den inneren Bereich der Galaxie eindringen, aber fusionieren anschließend mit dem Halo Profil. Deshalb können nur kleinere (oben genannte) Klumpungen näher am Galaktischen Zentrum überleben. Das Massenspektrum umfasst für diese Klumpen $10^8 M_{\odot} \leq M \leq 2 \cdot 10^{10} M_{\odot}$. Der Radius lässt sich mit Hilfe der folgenden Relation nach [9] berechnen:

$$r_{Kl,gro\beta} = \frac{R'}{0,1} \quad (12)$$

Wobei R' den Skalierungsradius der betrachteten Halo-Galaxie beschreibt. In diesem Fall also $16 kpc$. Die mittlere Dichte lässt sich mit:

$$\bar{\rho}_{int} = \frac{3(M_{max} - M_{min})}{4\pi R^3} \quad (13)$$

berechnen. Auf großen Skalen wird kein Kern eingeführt.

3.1.3 Vergleich

Zum Schluss dieses Kapitels zeigt die folgende Tabelle noch einmal die wichtigsten Größen dieser verschiedenen Klumpungen auf einen Blick:

	Klumpung auf kleinen Skalen	Klumpung auf großen Skalen
Massenbereich der Klumpungen M	$10^{-12} \cdot M_{\odot} \leq M \leq 10 \cdot M_{\odot}$	$10^8 M_{\odot} \leq M \leq 2 \cdot 10^{10} M_{\odot}$
mittlere Dichte $\bar{\rho}$	$1,12 \cdot 10^2 GeV cm^{-3}$	$4,39 \cdot 10^{-5} GeV cm^{-3}$
Radienverhältnis x_c	0,01	-
Kernradius R_c	$3,6 \cdot 10^{13} cm$	-
Klumpenradius R	$3,6 \cdot 10^{15} cm$	$1,6 \cdot 10^{23} cm$

Tabelle 1: Wichtigste charakteristische Werte der verschiedenen Arten der Klumpung. [4, 9]

Werden die aufgelisteten Werte miteinander verglichen, so wird deutlich, dass die Klumpung auf großen Skalen um Größenordnungen von 10^7 bis 10^8 in Masse und Radius größer ist als diese auf kleinen Skalen. Die Dichte dagegen ist um einen Faktor von 10^7 kleiner als auf der kleinen Skala.

3.2 Zerstörung und Überlebenswahrscheinlichkeiten von geklumpeter Materie

In diesem Kapitel wird auf die Zerstörung der geklumpten dunklen Materie eingegangen. Dieser Prozess tritt in einer frühen Phase der Haloformation in Kraft, bzw. ist in diesem Zeitintervall am effektivsten. Er hängt von einigen Faktoren ab und ist deshalb relativ kompliziert zu beschreiben. Interessant bei der Analyse dieses physikalischen Vorgangs ist die Frage unter welchen Umständen es dazu kommt, an welchen Positionen im Halo die Klumpen letztendlich überleben (Wahrscheinlichkeit) und welche anderen Größen ebenfalls eine Rolle dabei spielen.

3.2.1 Grundlagen

Zu den Faktoren, wodurch es zu diesem oben genannten Prozess kommt, zählen unter anderem:

- auf welche Weise sich die jeweilige Klumpung gebildet hat, also die “geschichtliche Entstehung”
- das Dichteprofil der dunklen Materie im Halo, in der sich die jeweilige Klumpung befindet
- Parameter der Bewegung in einem Orbit um ein Galaktisches Zentrum oder in größeren Klumpungen, die wiederum aus kleineren bestehen

Da es zu aufwändig ist all diese Faktoren in einer Simulation in Betracht zu ziehen, werden vereinfacht nur unbedingt notwendige Größen berechnet, wie zum Beispiel: eine Energiezunahme bei jeder Gezeitenwechselwirkung mit der Materie im Halo oder eine Anzahl dieser Wechselwirkungen in einer definierten dynamischen Zeit t_{dyn} . Des Weiteren soll die Zeit motiviert werden, in der die Klumpung zerstört werden kann. Nach Artikel [3] lässt sich die dynamische Zeit durch:

$$t_{dyn} \simeq 0,5 \cdot (G\rho_h)^{-\frac{1}{2}} \quad (14)$$

berechnen, dabei beschreibt ρ_h die Host Halodichte und G die Gravitation. t_{dyn} wird im weiteren Verlauf des Kapitels häufiger verwendet werden, aber hier vorweg schon einmal definiert. Zu den zwei wichtigsten Prinzipien im Bezug auf die Gezeitenzerstörung der Klumpung zählt:

- die hierarchische Clusterbildung sowie
- die Galaktische Scheibe.

3.2.2 Zerstörung von geklumpter Materie in der hierarchischen Clusterbildung

Auf den Umlaufbahnen erfahren die Klumpen so genannte “Gezeitenschocks”, wodurch die einzelnen Klumpen einen gewissen Anteil von Energie gewinnen. Nach jedem Schock erhält ein einzelner Klumpen mit Masse M und Radius R eine zusätzliche Energie von [3, 4]:

$$\Delta E = \frac{4\pi}{3} \gamma_1 G \rho_h M R^2, \quad (15)$$

$\gamma_1 \approx 1$, ρ_h wurde bereits unter 3.2.1 erläutert. Der unmittelbar damit verbundene interne Energieanstieg \dot{E} ist natürlich proportional zu ΔE [3]:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{\gamma_2 \Delta E}{t_{dyn}} = \frac{4\pi}{3} 2 \frac{1}{\sqrt{G\rho_h}} \gamma_1 \gamma_2 G \rho_h M R^2, \\ \Rightarrow \dot{E} &= \frac{8\pi}{3} \sqrt{G\rho_h} \gamma_1 \gamma_2 M R^2, \end{aligned} \quad (16)$$

γ_2 beschreibt Anzahl der Gezeitenschocks pro dynamische Zeit t_{dyn} . Wenn nun der interne Energiegewinn eine maximale Energie von $|E| = GM^2/2R$ übersteigt, wird der Klumpen zerstört werden. Aus diesen Größen kann die bereits angesprochene Zeit der Gezeitenzerstörung der Klumpung auf kleinen Skalen motiviert werden. Die Zeit ist dabei abhängig von der Dichte des Hosthalos und der Klumpung [3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(\rho, \rho_h)} &= \frac{\dot{E}}{|E|} \simeq \frac{4\gamma_2 \gamma_1 G^{\frac{1}{2}} \rho_h^{\frac{3}{2}}}{\rho} \\ \Rightarrow T(\rho, \rho_h) &= \frac{\rho}{4\gamma_2 \gamma_1 G^{\frac{1}{2}} \rho_h^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Mit steigender Klumpendichte steigt also auch die Zeit der Zerstörung. Jedoch wird diese wiederum mit steigender Halodichte reduziert.

3.2.3 Zerstörung von geklumpeter Materie durch die Galaktische Scheibe

Wenn sich Klumpen auf einer Flugbahn durch die Galaxie bewegen, durchqueren sie auch die Galaktische Scheibe. In der Scheibe befinden sich wiederum viele Sterne, wodurch viele Gravitationsfelder entstehen. Durch diese Felder werden die Klumpen beschleunigt und erhalten somit ebenfalls mehr Energie. Erklärbar ist dieses Phänomen, wie schon im letzten Abschnitt 3.2.2, durch Gezeitenenergieschocks. Für die Rate des Energieanstiegs ergibt sich [3]:

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = \frac{4g_m^2(\Delta z)^2}{T_c v_{z,c}^2}, \quad (18)$$

Hierbei ist T_c die Zeit für einen orbitalen Umlauf des Klumpens. $v_{z,c}$ beschreibt die vertikale Geschwindigkeit bei der Durchquerung und z den vertikalen Abstand (parallel zur Scheibenebene) von einem dunklen Materieteilchen zu dem Zentrum eines Klumpens.

Wenn vereinfacht davon ausgegangen wird, dass sich die Klumpen auf kreisförmigen Orbits bewegen, kann $v_{z,c}$ mit der Kreisgeschwindigkeit ermittelt werden [3]:

$$v_{z,c} = v_{rot}(r) = \sqrt{\frac{GM_H(r)}{r}}, \quad (19)$$

mit der Halomasse M_H innerhalb eines Kugelvolumens mit Radius r . g in Gleichung (18) ist ein Wert für die maximale Beschleunigung, die durch die Gravitationsfelder innerhalb der Scheibe verursacht wird. Diese Größe ist proportional zur Oberflächenmasse und kann mit [3]:

$$g_m(r) = 2\pi G\sigma_s(r) \quad (20)$$

berechnet werden. G ist dabei wieder die Gravitationskonstante. Die Oberflächenmasse der Galaktischen Scheibe dagegen kann vereinfacht mit Hilfe eines exponentiellen Gesetzes bestimmt werden [3]:

$$\sigma_s(r) = \frac{M_d}{2\pi r_0^2} e^{-\frac{r}{r_0}}, \quad (21)$$

mit $M_d = 8 \cdot 10^{10} M_\odot$ und $r_0 = 4,5 \text{ kpc}$. Wird das interne Dichteprofil der Klumpen im Vergleich zu Gleichung (9) etwas verändert, sodass es keinen Klumpenkern gibt folgt:

$$\rho_{int} = \frac{3-\beta}{3} \rho \left(\frac{r}{R}\right)^{-\beta} \quad (22)$$

so ist es möglich die maximale Energie des Klumpens (bestehend aus kinetischer und potentieller Energie) anzugeben:

$$|E| = \frac{3-\beta}{2(5-2\beta)} \frac{GM^2}{R}. \quad (23)$$

Für die Zeit nach der ein Klumpen durch die galaktische Scheibe zerstört wird, ergibt sich schließlich durch Integration von Gleichung (18) über das Volumen des Klumpens:

$$t_d = \frac{|E|}{\dot{E}} = \frac{2(5-\beta)}{3(5-2\beta)} \frac{G\rho T_c v_{z,c}^2}{g_m^2} \quad (24)$$

werden alle benötigten Größen in Gleichung (24) eingesetzt so folgt:

$$\Rightarrow t_d = \frac{2(5-\beta)}{3(5-2\beta)} \frac{G\rho T_c v_{z,c}^2}{g_m^2}. \quad (25)$$

Im Vergleich zur Zeit der Zerstörung in der hierarchischen Clusterbildung, sind beide Zeiten proportional zur Klumpendichte. Jedoch ist letztere zusätzlich abhängig von der vertikalen Geschwindigkeit, der Orbitumlaufzeit und antiproportional zur Beschleunigung beim Durchqueren der Scheibe. Das heißt durchqueren die Klumpen oberflächenmassenreichere Bereiche der Scheibe, so werden sie umso stärker beschleunigt und demnach schneller zerstört.

Es ist nun interessant zu sehen wie sich die Anzahl der Klumpen im Bezug auf das Alter des Universums verhält. Das heißt, wird das Alter mit $t_u = 13,7 \text{ Gyr}$ betrachtet, so würden alle Klumpen mit einer Dichte kleiner als $2 \cdot 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$

in einem Radius von unter 15 kpc von dem galaktischen Zentrum aus gesehen, zerstört werden. Anders ausgedrückt, Klumpen mit einer vergleichbaren Masse zum Mond $M = 2 \cdot 10^{-8} M_{\odot}$ würden innerhalb des genannten Radius nicht überleben. Da die Überlebenschancen von dem Abstand zum galaktischen Zentrum abhängen ist es sinnvoll eine Überlebenswahrscheinlichkeiten $P(r)$ [3] zu definieren. $P(r)$ wird in der folgenden Abbildung (5) für verschiedene Massen der Klumpen gezeigt.

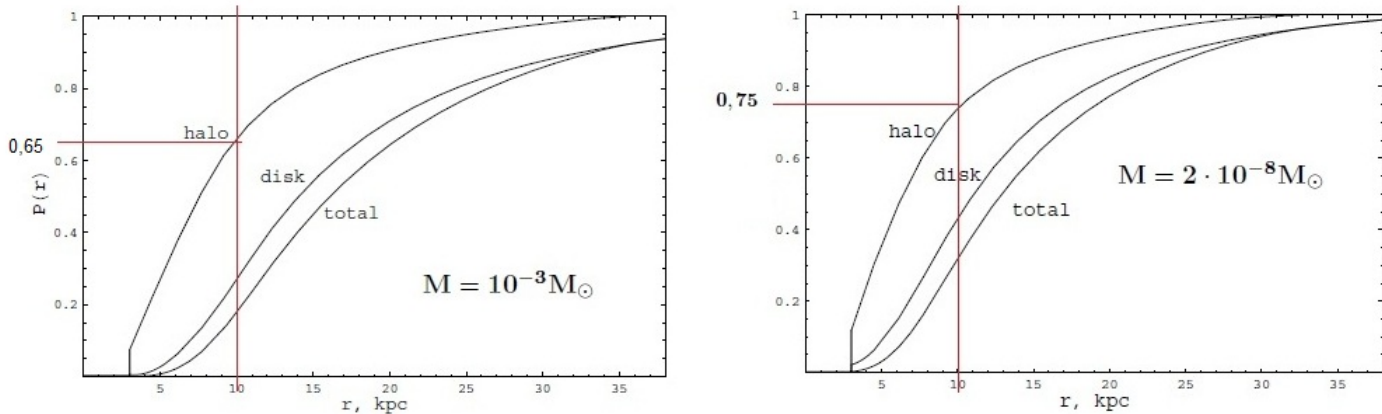


Abbildung 5: Überlebenswahrscheinlichkeit der geklumpten Materie mit Peakhöhen $\nu = 2$ auf kleinen Skalen im Abstand r vom Galaktischen Zentrum. Dabei wird diese im oberen Bild für eine Masse von $10^{-3} M_{\odot}$ gezeigt und im unteren für $2 \cdot 10^{-8} M_{\odot}$.

In den zwei Plots ist sichtbar, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit für kleine Klumpen größer ist als für größere. Für eine Region von weniger als 3 kpc jedoch, werden alle zerstört. Dieser Bereich ist also klumpenfrei und wird als “Aufwölbung” bzw. “Bulge” des Halos bezeichnet. Des Weiteren ist ersichtlich, dass die Zerstörung durch die galaktische Scheibe stark dominiert und insgesamt die Überlebenswahrscheinlichkeit bis etwa 12 kpc stark und danach langsamer zunimmt. Dennoch ist die Zerstörung durch die Scheibe sehr viel weitreichender mit $r > 40 \text{ kpc}$ [3].

3.2.4 Zusammenfassung und Vergleich

Zum Abschluss dieses Kapitels wird nochmals eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse gezeigt. In der folgenden Tabelle sind die jeweiligen Überlebenswahrscheinlichkeiten für die Klumpung auf kleinen Skalen dargestellt. Dabei ist besonders auffällig, dass Klumpungen mit kleinerer Masse eine höhere Wahrscheinlichkeit zum Überleben aufweisen als größere. Des Weiteren spielt die Position vom Galaktischen Zentrum eine große Rolle. Denn für kleine Abstände ist die Wahrscheinlichkeit für die Zerstörung einer Klumpung größer als für große Abstände. Im Bezug auf diese Annahme ist die Spannweite der Wahrscheinlichkeit auch sehr viel geringer als für kleine Abstände.

Masse der Klumpung M	Position im Halo	Überlebenswahrscheinlichkeit
$2 \cdot 10^{-8} M_{\odot}$	$r_{\odot} = 8,5 \text{ kpc}$	32%
$10^{-6} M_{\odot}$	$r_{\odot} = 8,5 \text{ kpc}$	27%
$10^{-3} M_{\odot}$	$r_{\odot} = 8,5 \text{ kpc}$	18%
$2 \cdot 10^{-8} M_{\odot}$	$r > 40 \text{ kpc}$	66%
$10^{-6} M_{\odot}$	$r > 40 \text{ kpc}$	63%
$10^{-3} M_{\odot}$	$r > 40 \text{ kpc}$	57%

Tabelle 2: Überlebenswahrscheinlichkeiten im Abstand r vom Galaktischen Zentrum für verschiedene Massen der Klumpung.

3.3 Verteilung der Klumpung im galaktischen Halo

Nachdem nun bekannt ist, wie die Struktur der Klumpung aussieht und wodurch sie zerstört werden kann, wird jetzt auf die Verteilung in der Galaxie eingegangen. Unterschiede treten dabei zwischen kleinen und großen Skalen der Klumpung auf, die in diesem Abschnitt diskutiert werden.

3.3.1 Verteilung der Klumpung auf kleinen Skalen

Numerische Berechnung

Um die Verteilung im galaktischen Halo zu erhalten, wird die Teilchendichte n_{cl} verwendet. Diese Größe beschreibt also die Anzahl von Klumpen pro Volumen. Die Berechnung kann nach Artikel [5] numerisch, aber auch vereinfacht durch eine Näherung erfolgen. Im Folgenden werden zunächst die Ergebnisse der numerischen Berechnung analysiert. Dazu wird nach [5] die folgende Gleichung:

$$n_{cl}(M, R) d\ln(M) d\ln(R) = \frac{\rho_{DM}(r_{\odot})}{M} \xi(M, \nu) d\ln(M) d\nu \quad (26)$$

numerisch gelöst, um die Massendichte $n_{cl} M$ zu erhalten. Wobei

$$\xi(n, \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\nu^2}{2}} (n + 3) y(\nu), \quad (27)$$

den Anteil der Materie beschreibt, der aus Klumpen besteht. Die Funktion $y(\nu)$ in Gleichung (27), ist abhängig von der Dichtefluktuation ν und steigt erst für einen Wert von $\nu = 0,6$ leicht und kurz darauf stark bis etwa $\nu = 2$ an. Ab diesem Wert verläuft die Steigung konstant. Der Funktionsverlauf ist in der folgenden Abbildung zu sehen.

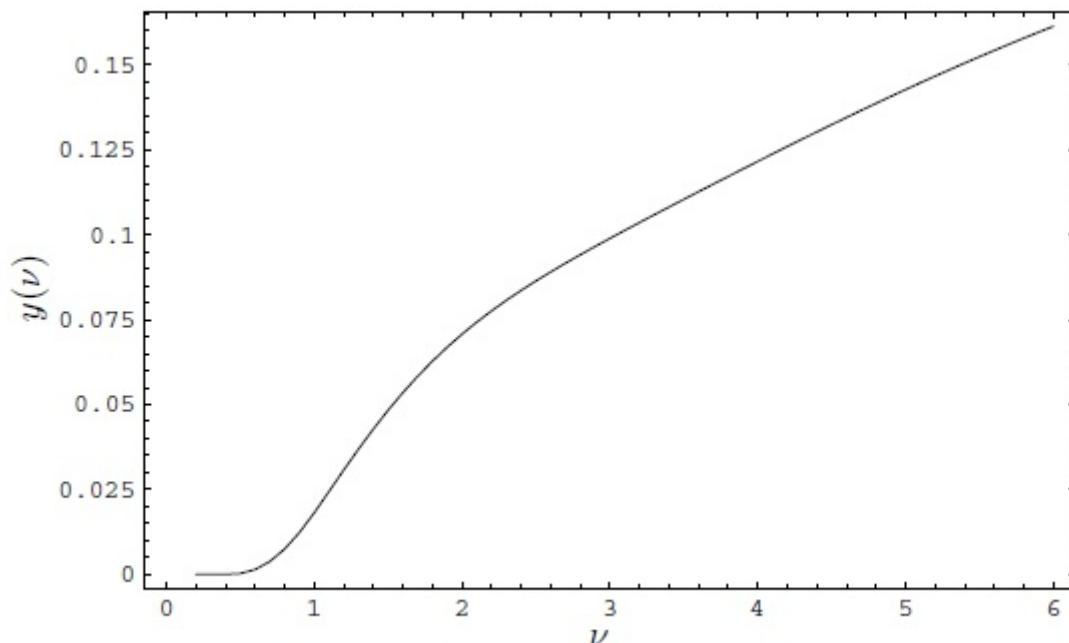


Abbildung 6: Funktion $y(\nu)$ aufgetragen gegen die Peakhöhe ν der Dichtefluktuation [5].

Für die Analyse im Bezug auf dunkle Materie ist aber, wie bereits in den vorherigen Kapiteln erwähnt, nur der Bereich von $0,5 - 2,5$ interessant. In Gleichung (26) fällt auf, dass ξ von M und nicht von n abhängt. Es muss also noch gezeigt werden, dass M proportional zu n ist. Dieser Zusammenhang folgt nach [5] aus:

$$n = -3 - 6 \frac{\partial \ln(\sigma_{eq})}{\partial \ln(M)}, \quad (28)$$

σ_{eq} beschreibt die Varianz der Störung des Leistungsspektrums $P(k)$ zur Zeit t_{eq} und lässt sich durch:

$$\sigma_{eq} = 8,2 \cdot 10^{3,7(n_p-1)-3} \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1-n_p}{6}} \cdot \left[1 - 0,06 \log\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)\right]^{\frac{3}{2}} \quad (29)$$

berechnen [5]. Da die Verteilung der Klumpung auch von der Distanz zum Galaktischen Zentrum des Halos abhängt, müsste dementsprechend auch ξ in gewisser Weise von diesem Parameter abhängen. Um dies verstehen zu können, betrachten wir die Ergebnisse aus Gleichung (26). In der folgenden Abbildung (7) sind diese als Massendichte gegen den Radius jener Klumpung in einem festen Abstand von $l = r_{\odot} = 8,5 \text{ kpc}$ vom Galaktischen Zentrum für jeweils

verschiedene Massen aufgetragen. In diesem Fall kann auf diese Weise leider nicht allein die Anzahl der Klumpen n_{cl} sinnvoll aufgetragen werden, deshalb wird die Massendichte als Größe gewählt.

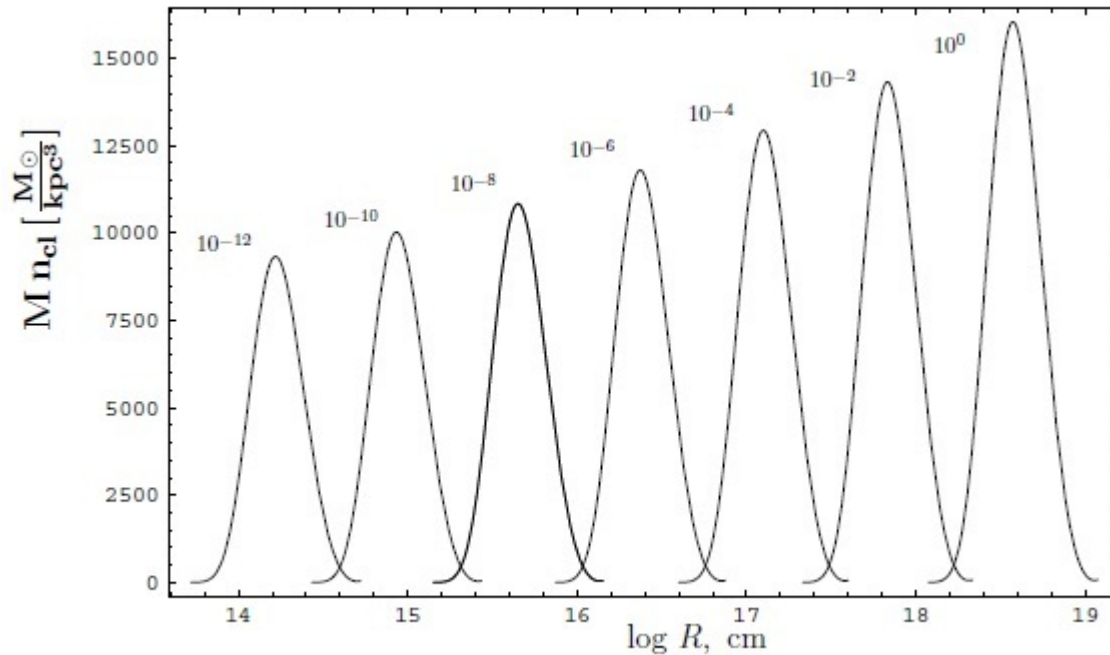


Abbildung 7: Die Massendichte $M n_{cl}(M, R)$ ist gegen $\log(R)$ für verschiedene Massen der Klumpung aufgetragen [5].

Bereits hier wird deutlich, dass die Massendichte mit zunehmendem Radius und ansteigender Masse der Klumpung ebenfalls wächst. Zur Veranschaulichung und schnellerem Verständnis werden diese Werte nun extrahiert, tabelliert und anschließend nochmals sinnvoller aufgetragen. Dabei werden nur die Peakwerte der jeweiligen gaußähnlichen Kurven verwendet und in Tabelle (3) gezeigt.

Masse der Klumpung $M_{cl} [mal M_{\odot}]$	Massendichte $M n_{cl}(M, R, l = r_{\odot})$	Anzahldichte $n_{cl}(M, R, l = r_{\odot})$	Radius $\log(R) [cm]$
10^{-12}	9400	$9,4 \cdot 10^{15}$	14,2125
10^{-10}	10000	$1 \cdot 10^{14}$	14,975
10^{-8}	10875	$1,09 \cdot 10^{12}$	15,65
10^{-6}	11800	$1,18 \cdot 10^{10}$	16,375
10^{-4}	12950	$1,29 \cdot 10^8$	17,1
10^{-2}	14375	$1,44 \cdot 10^6$	17,825
10	16050	$1,61 \cdot 10^5$	18,57

Tabelle 3: Tabellierung der Peakwerte der Gaußkurven aus Abbildung (7). Zusätzlich ist die Massendichte in die Anzahl der Klumpen pro Volumen $1/kpc^3$ umgerechnet worden.

Da die Massendichte von zwei Größen abhängt, bietet es sich hier an, die Werte aus der Tabelle (3) in ein dreidimensionales Diagramm zu füllen. Somit ergibt sich als dreidimensionale Auftragung mit dem Radius auf der x-, der Masse auf der y-, und der Massendichte der Klumpung auf der z-Achse:

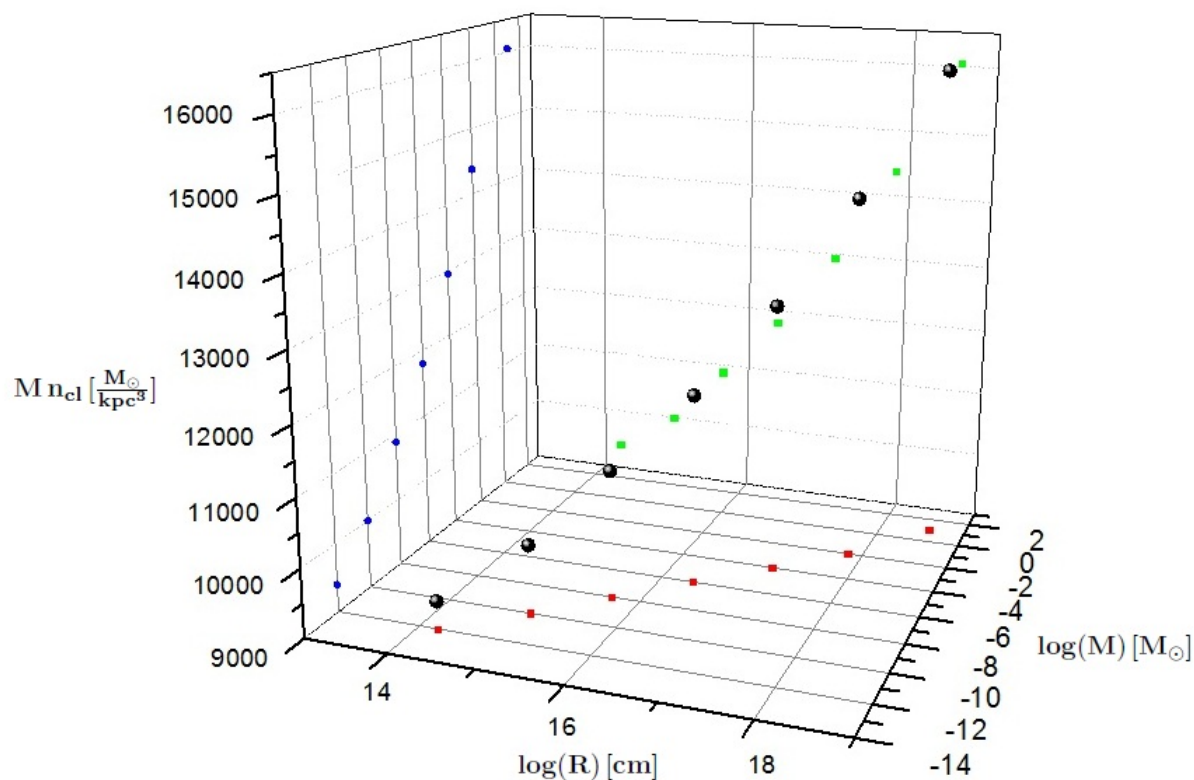


Abbildung 8: Auftragung der einzelnen Werte aus Tabelle (3), mit dem Massenverhältnis $M n_{cl}(M, R)$ auf der z-Achse gegen den Radius auf der x-Achse $\log(R)$ und die Masse auf der y-Achse $\log(M)$. Die blauen Punkte stellen dabei die Projektion der schwarzen (eigentlichen) Werte in die y-z-Ebene dar, die roten diejenigen in die x-y-Ebene und die grünen diejenigen in die x-z-Ebene.

Wie in Abbildung (8) zu sehen ist, ist an dieser Position von dem galaktischen Zentrum die Massendichte für kleine und leichtere Klumpen relativ klein und steigt für eine Zunahme der Masse und des Radius scheinbar exponentiell an. Da hier das Massenverhältnis aufgetragen ist, folgt daraus, dass die Anzahl der Klumpen pro Volumen umgekehrt verläuft. Das heißt, für kleine und leichtere Klumpen größer ist als für größere und schwerere wie in einem Plot weiter unten für verschiedene Massen zu sehen ist (Tabelle (4), Abbildung (8)).

Aber nun noch einmal zurück zu Gleichung (29) mit σ_{eq} . Werden die obigen Zusammenhänge nochmals betrachtet so wird deutlich, dass $n \propto \sigma_{eq} \propto M$ ist. Da jedoch, wie aus den numerischen Ergebnissen hervorgeht, die Masse der Klumpung wiederum von dem Abstand l zu dem Galaktischen Zentrum abhängt, folgt $n \propto \sigma_{eq} \propto M \propto l$ und somit auch für $\xi \propto n \propto \sigma_{eq} \propto M \propto l$. ξ hängt also über leichte Umwege auch von dem Abstand zum Galaktischen Zentrum ab.

Vereinfachte Berechnung

Für die analytische Berechnung lässt sich nach [5] eine Approximation einführen. Die Anzahl der Klumpen pro Volumen ist in diesem Fall proportional zur Dichte des Halos dem Anteil der geklumpten dunklen Materie ξ und invers proportional zur Masse der jeweiligen Klumpung. Dies ist durchaus plausibel, da diese Proportionalitäten bereits in Gleichung (26) gegeben waren. Insgesamt folgt nach [5]:

$$n_{cl}^{app}(l, M) = \frac{\xi \rho_{DM}(l)}{M}. \quad (30)$$

Auch für ξ wird zur schnelleren Demonstration ein konstanter Wert angenommen und in einem später folgenden Beispiel zu 0,002 festgelegt. Für die weitere Analyse wird das NFW [10] und das Moore [11] Dichteprofil des Halos verwendet. Das NFW Dichteprofil ist gegeben durch [10]:

$$\rho_{DM}(l) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{l}{R'}\right) \left(1 + \frac{l}{R'}\right)^2}, \quad (31)$$

ρ_0 , R' ist der Skalierungsfaktor für die betrachtete Galaxie und l der Abstand vom Galaktischen Zentrum, da in dieser Arbeit unsere Galaxie betrachtet werden soll, wird für $R' = 16 \text{ kpc}$ gewählt. Das Moore Dichteprofile ist gegeben durch [12]:

$$\rho_{DM}(l) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{l}{R'}\right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \left(\frac{l}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}, \quad (32)$$

mit den bekannten Variablen. Diese Verteilungen werden in den folgenden Abbildungen demonstriert. Der Massenbereich beträgt für die hier betrachtete Klumpung auf kleinen Skalen $10^{-12} \cdot M_\odot \leq M \leq 10 \cdot M_\odot$. Zum Vergleich mit den numerischen Daten sind die Werte in dieser vereinfachten Rechnung ebenfalls für einen festen Abstand von $l = r_\odot = 8,5 \text{ kpc}$ berechnet worden und in der kommenden Tabelle aufgelistet. Für das NFW- und Moore-Dichteprofil ergibt sich.

Masse der Klumpung M_{cl} [times M_\odot]	analytisch berechnete Werte $n_{cl}^{app}(M, R, l = r_\odot)$		numerische berechnete Werte von $n_{cl}(M, R, l = r_\odot)$
	Moore	NFW	
10^{-12}	$1,87 \cdot 10^{16}$	$1,46 \cdot 10^{16}$	$9,4 \cdot 10^{15}$
10^{-10}	$1,87 \cdot 10^{14}$	$1,46 \cdot 10^{14}$	$1 \cdot 10^{14}$
10^{-8}	$1,87 \cdot 10^{12}$	$146 \cdot 10^{12}$	$1,09 \cdot 10^{12}$
10^{-6}	$1,87 \cdot 10^{10}$	$1,46 \cdot 10^{10}$	$1,18 \cdot 10^{10}$
10^{-4}	$1,87 \cdot 10^8$	$1,46 \cdot 10^8$	$1,29 \cdot 10^8$
10^{-2}	$1,87 \cdot 10^6$	$1,46 \cdot 10^6$	$1,44 \cdot 10^6$
10	1872,76	1462,76	$1,61 \cdot 10^5$

Tabelle 4: Vergleich der analytisch (NFW - und Moore - Dichteprofil) und numerisch berechneten Werte für n_{cl} . Zusätzlich wird die jeweilige Masse der geklumpten dunklen Materie gezeigt.

Es ist auffällig, dass für Massen im Bereich von $10^{-10} \cdot M_\odot \leq M \leq 10^{-2} \cdot M_\odot$ die Anzahl der Klumpen pro Volumen die gleiche Größenordnung aufweisen. Erst für sehr geringe 10^{-12} und relativ große Massen 10 weicht die Näherung von der numerischen Rechnung ab. Die Werte des NFW Dichteprofiles passen jedoch um einen Faktor 0,5 besser zu den numerisch berechneten. In Abbildung (9) wird nun n_{cl} gegen den Abstand l vom Galaktischen Zentrum für die in den Größenordnungen übereinstimmenden Massen, aufgetragen. Wie bereits vorher beschrieben, ist im Bereich des ‘‘Bulges’’ $l \leq 3 \text{ kpc}$ keine geklumpete dunkle Materie vorhanden.

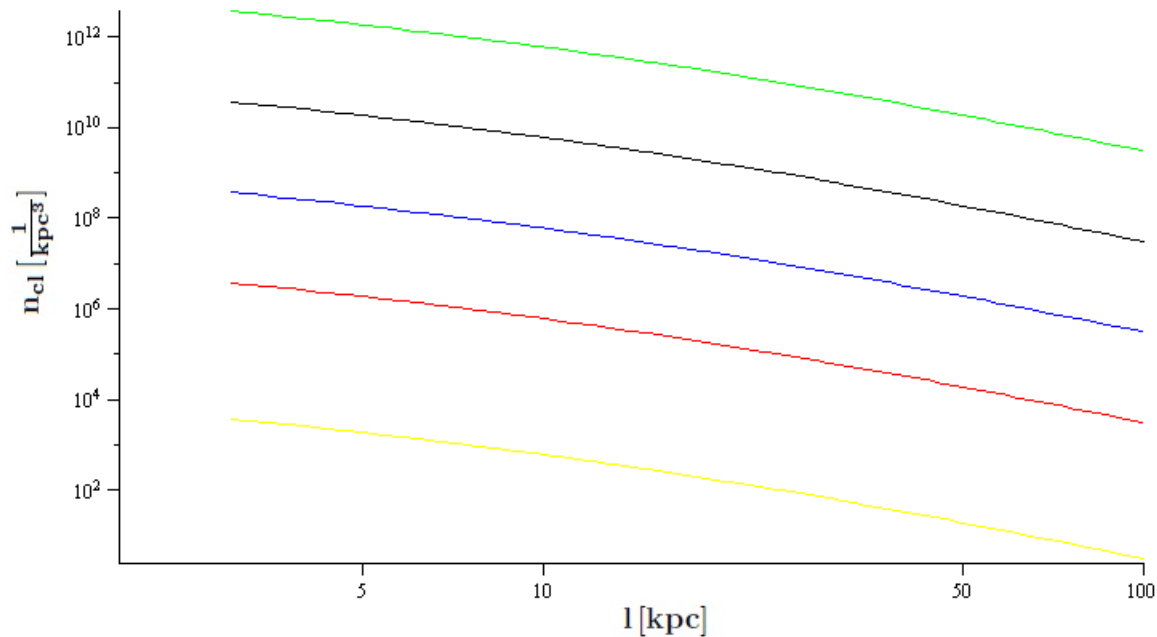


Abbildung 9: Verteilungsfunktionen $n_{cl}(l)$ mit Hilfe des NFW-DichteProfils gegen den Abstand vom Galaktischen Zentrum l für verschiedene Massen $10^{-8} \cdot M_{\odot} \leq M \leq 10 \cdot M_{\odot}$, grün mit der geringsten Masse und gelb mit der größten.

3.3.2 Verteilung der Klumpung auf großen Skalen

Für große Klumpen folgt die Verteilungsfunktion aus numerischen Simulationen der folgenden Form [9]:

$$n_{cl}^{groB}(l, M) = n_{cl,0} \frac{1}{\left(\frac{M}{M_H}\right)^{1,9} \left(1 + \left(\frac{l}{l_{sc}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (33)$$

$n_{cl,0}$ beschreibt eine Normierungskonstante, $M_H = 2 \cdot 10^{12}$ die Masse des Halos und $l_{sc} = 10 \text{ kpc}$ [9] einen Skalierungsfaktor. Die zwei anderen Variablen sind mit denen in Gleichung (31) und (32) identisch. Auffällig ist hier, dass die Funktion nicht proportional zur Halodichte ist, stattdessen zur Halomasse hoch 1,9 mal einer Normierungskonstanten mit der Dimension Anzahl pro Volumen und zu einem Term der sich mit der Potenz (3/2) verändert. Für einen ersten Vergleich zwischen den beiden Arten der Klumpung muss die Gleichung (33) etwas approximiert werden, da die Normierungskonstante in der Literatur nicht angegeben wurde. Hierzu wird nun die folgende Näherung verwendet um eine sinnvolle Abschätzung erhalten zu können: $n_{cl,0} \cdot M_H^{1,9} = [cm^{-3}] \cdot [GeV^{1,9}] \stackrel{!}{=} [GeV \cdot cm^{-3}] \equiv \rho_0$. Somit ändert sich Gleichung (33) zu:

$$n_{cl}^{groB}(l, M) = \frac{\rho_0}{M^{1,9} \left(1 + \left(\frac{l}{l_{sc}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die Klumpung auf großen Skalen in einem Massenbereich von $10^8 M_{\odot} \leq M \leq 2 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ ergibt sich der folgende Verlauf dieser Verteilung:

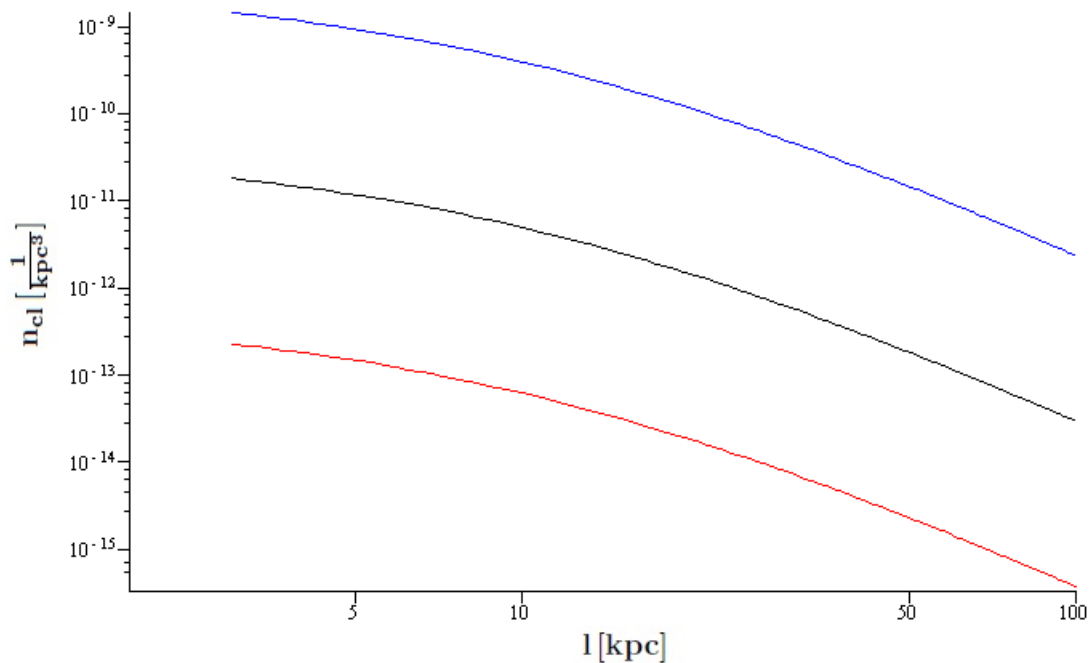


Abbildung 10: Verteilungsfunktion der Klumpung auf großen Skalen mit $n_{cl}^{groB}(l)$ gegen den Abstand vom Galaktischen Zentrum für verschiedene Massen $10^8 M_\odot \leq M \leq 2 \cdot 10^{10} M_\odot$. Für die kleinste Masse folgt der rote für die größte der grüne Graph.

In der Abbildung (10) ist zu sehen, dass die Anzahl der Klumpung auf großen Skalen für einen wachsenden Radius weniger rasch abfällt, als dies bei den Klumpen auf kleinen Skalen (Abbildung (9)) der Fall ist. Dort wird bis 100 kpc ein Abfall von etwa drei Größenordnungen deutlich. Bei großen Skalen jedoch nur ein Faktor von zwei. Des Weiteren ist die Anzahl der Klumpungen pro kpc^3 mit maximal 10^{-9} um etwa zwölf Größenordnungen kleiner als bei den Klumpen auf kleinen Skalen.

3.4 Annihilationssignal aus klumpender dunkler Materie

In diesem Kapitel wird der eigentlich wichtigste und interessanteste thematische Aspekt im Bezug auf Klumpung dunkler Materie präsentiert: das Annihilationssignal. Durch die Annihilation entstehen aus Teilchen dunkler Materie, uns aus dem Standardmodell bekannte Teilchen, wie zum Beispiel Neutrinos, die mittels Detektoren auf der Erde registriert werden können.

Mit Hilfe der in Kapitel (3.3) hergeleiteten Verteilung der Klumpung im galaktischen Halo und der Dichteverteilung der Klumpung ist es nun möglich das durch diese Objekte verursachte Annihilationssignal zu berechnen. Das Signal wird für die geklumpete als auch für die ungeklumpete dunkle Materie berechnet und anschließend verglichen. Des Weiteren wird, wie auch schon bei der Verteilungsfunktion, zwischen kleiner und großer Klumpung unterschieden.

3.4.1 Allgemeine Grundlagen für die Berechnung des Annihilationssignals

Nach [5, 6] lässt sich das erwartete Signal aus Mehrfachintegralen berechnen. Das echte Signal ist dabei proportional zu der Funktion, die aus dem Integral folgt. Bei der letzten Integration ist die obere Grenze abhängig von einem Öffnungswinkel α . Um die gesamte Grenze, einschließlich Winkel verstehen zu können, dient die folgende Skizze. Im Abstand r_\odot vom dem galaktischen Zentrum befindet sich, auf einem Orbit bewegend, die Sonne. Da der Abstand von der Erde zur Sonne vergleichsweise klein ist, kann in der weiteren Berechnung angenommen werden, dass für die Registrierung des Signals auf der Erde, der gleiche Abstand, wie von dem Galaktischen Zentrum zur Sonne $r_\odot = 8,5 kpc$ verwendet werden kann. Der Winkel α beschreibt den Öffnungswinkel zwischen der Richtung des Galaktischen Zentrums und der Beobachtungslinie zu einem Klumpen. r ist der Abstand von dem Beobachtungspunkt zu einem Klumpen und l der Abstand von dem Galaktischen Zentrum zu einem Klumpen. Bei der Berechnung für das Signal durch ungeklumpete Materie ist r der Abstand zu einem beliebigen Punkt im Halo.

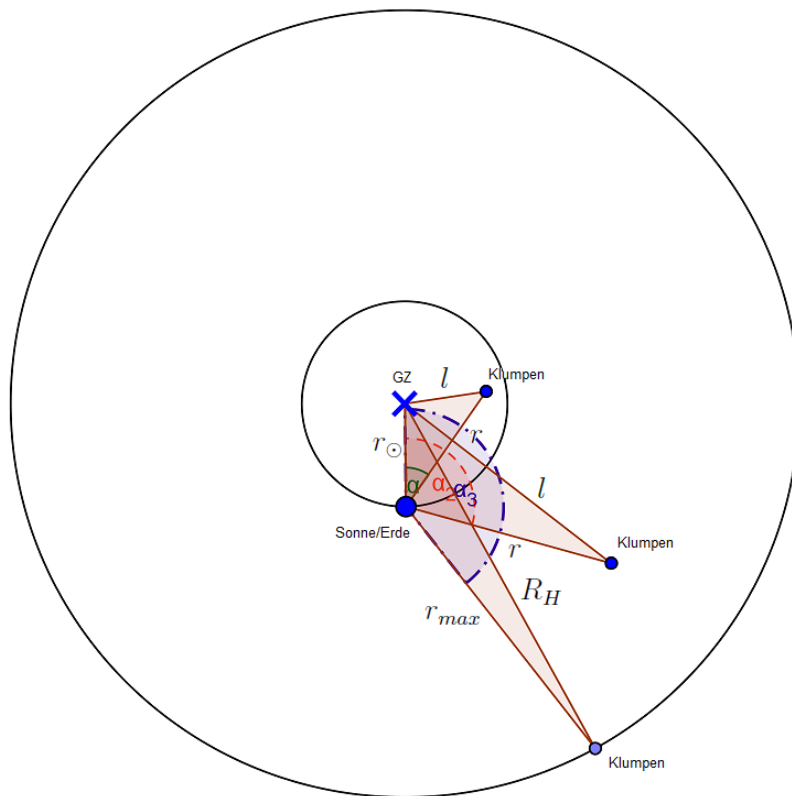


Abbildung 11: Definition von $l(\alpha, r)$, dem Abstand vom Galaktischen Zentrum zu einem Klumpen (kleiner blauer Punkt). Das Galaktische Zentrum (GZ) wird durch das Kreuz im Kreismittelpunkt symbolisiert. Der große blaue Punkte auf dem ersten Kreis beschreibt die Umlaufbahn der Sonne/Erde im Abstand von $r_{\odot} = 8,5 \text{ kpc}$ um das Zentrum. α ist der Winkel zwischen Beobachtungsrichtung des Klumpens und der Richtung zum Galaktischen Zentrum. r zeigt die Distanz zwischen der Erde (bzw. dem Beobachtungspunkt) und dem Klumpen. Für den maximalen Fall wird aus r , r_{max} und für l wird der Radius des gesamten Halos R_H verwendet.

Um die obere Grenze festlegen zu können, muss zunächst l bestimmt werden. Dies geschieht leicht durch Anwendung des Kosinussatzes. Damit ergibt sich für l :

$$l(\alpha, r) = \sqrt{(r^2 + r_{\odot}^2 - 2rr_{\odot}\cos(\alpha))}. \quad (34)$$

l ist also abhängig von r und α . Da die Grenze den maximalen Abstand r zu einer Verdichtung der dunklen Materie beschreibt, müssen in Gleichung (34) zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$l \rightarrow R_H \text{ und } r \rightarrow r_{max}$$

Mit diesen Änderungen wird Gleichung (34) nun etwas umgestellt um problemlos r_{max} bestimmen zu können:

$$\begin{aligned} r_{max}^2 - 2r_{max}r_{\odot}\cos(\alpha) + r_{\odot}^2 - R_H^2 &= 0 \\ \Rightarrow r_{max}(\alpha, r) &= \cos(\alpha)r_{\odot} \pm \sqrt{(R_H^2 - r_{\odot}^2\cos^2(\alpha) - r_{\odot}^2)} \\ \Rightarrow r_{max}(\alpha, r) &= \cos(\alpha)r_{\odot} \pm \sqrt{(R_H^2 - r_{\odot}^2\sin^2(\alpha))}. \end{aligned} \quad (35)$$

In den weiter unten gezeigten Integralen wird bei der letzten Integration von 0 bis r_{max} integriert, da angenommen wird, dass es sich um einen sphärischen Halo handelt. Aus diesem Grund wird nur die positive Lösung aus (35) verwendet.

Geklumpete dunkle Materie

Für die Klumpung lautet die entsprechende Formel [5]:

$$I_{cl}(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \frac{2\pi r^2}{r^2} \int_{M_{min}}^{M_{max}} dM \int_{R_{min}}^{R_{max}} dR n_{cl}(M, R, l(\alpha, r)) \dot{N}_{cl}(M, R) \quad (36)$$

$$\Rightarrow I_{cl}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \int_{M_{min}}^{M_{max}} dM \int_{R_{min}}^{R_{max}} dR n_{cl}(M, R, l(\alpha, r)) \dot{N}_{cl}(M, R). \quad (37)$$

Zuerst wird über die Masse und den Radius der Klumpen integriert und zum Schluss über den Abstand von dem Ort der Beobachtung zu einem Klumpen in Abhängigkeit von dem eingeschlossenen Winkel α . $\dot{N}_{cl}(M, R)$ beschreibt dabei die Annihilationsrate der dunklen Materieteilchen in einem Klumpen, die anschließend erläutert wird. Die Annihilationsrate ist nach [5] durch ein weiteres Integral über die Dichte des Klumpens zum Quadrat gegeben:

$$\dot{N}_{cl} = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho_{int}^2(r) \frac{\langle \sigma_{ann} v \rangle}{m_\chi^2} \quad (38)$$

dabei beschreibt $\langle \sigma_{ann} v \rangle = a + bv^2 + \mathcal{O}(v^4)$ den Annihilationswirkungsquerschnitt mal die Geschwindigkeit v , a charakterisiert nur die s-Wellenamplitude der involvierten Teilchen und b die s- und p-Wellenamplitude [5]. m_χ ist die Bezeichnung für die Masse des dunklen Materieteilchens und $\rho_{int}(r)$ ist bekannt aus Kapitel (3.1). Da die Klumpen verschiedene Dichteprofile aufweisen, können sie in gewisser Weise “deformiert” sein. Deshalb ist es sinnvoll eine Art “Formfaktor” S einzuführen. Somit ändert sich Gleichung (38) zu:

$$\dot{N}_{cl} = \frac{3}{4\pi} \frac{\langle \sigma_{ann} v \rangle}{m_\chi^2} \frac{M^2}{R^3} S \quad (39)$$

und S ist dementsprechend durch:

$$S = \frac{8\pi}{3} \frac{R^3}{M^2} \int_0^\infty dr r^2 \rho_{int}^2(r) \quad (40)$$

berechenbar, R ist der Radius und M die Masse des Klumpens. Wird das Integral über die Dichteverteilung gelöst so ergibt sich für S in Abhängigkeit von β , R_c und R :

$$S = \frac{(3 - \beta)^2}{3(2\beta - 3)} \frac{\left(\frac{2\beta}{3} \left(\frac{R_c}{R}\right)^{3-2\beta} - 1\right)}{\left(1 - \frac{\beta}{3} \left(\frac{R_c}{R}\right)^{3-\beta}\right)^2} \quad (41)$$

mit $R_c/R = x_c$ dem Radienverhältnis. Wenn es sich um einen perfekt kreisförmigen Klumpen handelt, ist $S = 1$ und das Dichteprofil konstant für $r < R$:

$$\rho_{int}(r) = \begin{cases} 0 & r > R \\ const = \rho & r < R \end{cases}. \quad (42)$$

In der späteren Berechnung werden in der Literatur häufig verwendete Werte mit $\beta = 1,8$ und $x_c = 0,01$ angenommen. Somit ergibt sich für $S = 12,1$.

Ungeklumpte dunkle Materie

Für das Signal aus dem Halo lautet die Formel nach [5]:

$$I_{hom}(\alpha) = \frac{\langle \sigma_{ann} v \rangle}{2} \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \frac{\rho_{DM}^2(l(\alpha, r))}{m_\chi^2}, \quad (43)$$

I_{hom} ist proportional zur Halodichte im Quadrat, sowie zum Annihilationswirkungsquerschnitt mal der Geschwindigkeit und invers proportional zur Masse des dunklen Materieteilchens im Quadrat.

Verstärkungsfaktor

Werden die Annihilationssignale der geklumpten und ungeklumpten dunklen Materie kombiniert, so lässt sich ein “Verstärkungsfaktor” des Signals η durch die Anwesenheit der Klumpung motivieren:

$$\eta = \frac{I_{cl} + I_{hom}}{I_{hom}}, \quad (44)$$

sodass später bei der Analyse die Erhöhung des Signals durch die Klumpung verdeutlicht werden kann.

3.4.2 Annihilationssignal durch die Klumpung auf kleinen Skalen

Wird Gleichung (31) in (30) eingefügt, so folgt zunächst im Fall des NFW-Dichteprofiles für die Verteilungsfunktion der Klumpen:

$$n_{cl}^{app}(l(\alpha, r), M) = \frac{\xi \rho_0}{M} \frac{1}{\left(\frac{l(\alpha, r)}{R'}\right) \left(1 + \frac{l(\alpha, r)}{R'}\right)^2} \quad (45)$$

und mit der Gleichung (34) für den Abstand des Klumpens von dem Galaktischen Zentrum:

$$\Rightarrow n_{cl}(l(\alpha, r), M) = \frac{\xi \rho_0}{M} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{(r^2 + r_\odot^2 - 2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{(r^2 + r_\odot^2 - 2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'}\right)^2}. \quad (46)$$

Um später einfacher die Ergebnisse für Klumpen und Halos vergleichen zu können, ist es sinnvoller, die Integration über die Masse und den Radius der Klumpen zu vernachlässigen. Stattdessen wird eine mittlere Klumpendichte $\overline{\rho_{int}}$ verwendet. Des Weiteren wird der Annihilationswirkungsquerschnitt und die Masse des dunklen Materieteilchen gleich eins gesetzt, da nicht eindeutig klar ist, um welches Teilchen es sich handelt. Interessant ist im Endeffekt nur der Verlauf der berechneten Kurve und keine exakten Werte. Ohne diese genannten Integrale ändert sich Gleichung (37) zu:

$$\Rightarrow I_{cl} = \frac{1}{2} \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr n_{cl}(l(\alpha, r), M) \dot{N}_{cl}(M, R). \quad (47)$$

Nun werden alle bereits beschriebenen und benötigten Größen (Gleichung (39) und (45)) eingesetzt und es folgt:

$$\Rightarrow I_{cl}(\alpha) = \frac{3}{8\pi} S \underbrace{\frac{\langle \sigma_{ann} v \rangle}{m_\chi^2}}_{\equiv 1} \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \frac{\xi \rho_0 M}{R^3} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{(r^2 + r_\odot^2 - 2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{(r^2 + r_\odot^2 - 2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'}\right)^2}. \quad (48)$$

Die mittlere Dichte kann durch:

$$\overline{\rho_{int}} = \frac{3M}{4\pi R^3} \sim 2 \cdot 10^{-22} \frac{g}{cm^3} = 1,12 \cdot 10^2 \frac{GeV}{cm^3}. \quad (49)$$

berechnet werden. Damit vereinfacht sich die obige Formel (48) zu:

$$I_{cl}^{NFW}(\alpha) = \frac{1}{2} S \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \xi \rho_0 \overline{\rho_{int}} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{(r^2 + r_\odot^2 - 2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{(r^2 + r_\odot^2 - 2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'}\right)^2}. \quad (50)$$

Hier ist $S = 12,1$ (berechnet aus Gleichung (41)) und ξ beträgt 0,002 nach [5]. Da unsere Galaxie verwendet wird, ist $R' = 16 kpc$. Ein Problem taucht nun bei der Lösung des Integrals auf, denn es ist nicht analytisch, sondern nur numerisch lösbar. Deshalb wird in diesem Fall ein Simpsonalgorithmus mit den oben genannten Grenzen $r = 0..r_{max}(\alpha) = 0..(\cos(\alpha)r_\odot + \sqrt{(R_H^2 - r_\odot^2 \sin^2(\alpha))})$ für einen festen Winkel α verwendet. Das heißt diese Gleichung wird jeweils für einen Wert von α im Intervall von $[0^\circ, 180^\circ]$ gelöst. Somit ergibt sich schließlich eine Funktion in Abhängigkeit von α . Der explizite Fluss kann aus der Fläche unter dieser Kurve ermittelt werden, dies ist aber für diese Analyse nicht notwendig.

Analog zu dieser Rechnung folgt aus (32), die Formel für das Moore-Profil:

$$I_{cl}^{Moore}(\alpha) = \frac{1}{2}S \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \xi \rho_0 \overline{\rho_{int}} \frac{\rho_0}{\left(\frac{\sqrt{(r^2+r_\odot^2-2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{(r^2+r_\odot^2-2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'} \right)^{\frac{3}{2}} \right]}. \quad (51)$$

Die Ergebnisse werden zu einer besseren Übersicht erst im letzten Abschnitt dieses Kapitels gezeigt.

3.4.3 Annihilationssignal durch die der Klumpung auf großen Skalen

Für das Signal der Klumpung, die ein größeres Volumen einnimmt, muss in der Berechnung etwas “getrickst” werden um einen sinnvollen Vergleich zeigen zu können. Zunächst ergibt sich mit der Gleichung für die Verteilung (33) mit (37):

$$I_{cl}(\alpha) = \frac{1}{2}S \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \int_{M_{min}}^{M_{max}} dM \frac{3M^2}{4\pi R^3} n_{cl,0} \frac{1}{\left(\frac{M}{M_H} \right)^{1,9} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{(r^2+r_\odot^2-2rr_\odot \cos(\alpha))}}{l_{sc}} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (52)$$

Durch leichte Umformung folgt:

$$\Rightarrow I_{cl}(\alpha) = \frac{1}{2}S \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \int_{M_{min}}^{M_{max}} dM \frac{3M^{0,1}}{4\pi R^3} n_{cl,0} \frac{M_H^{1,9}}{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{(r^2+r_\odot^2-2rr_\odot \cos(\alpha))}}{l_{sc}} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (53)$$

Anschließend wird das erste Integral über die Masse ausgeführt, wodurch sich wieder eine mittlere Dichte definieren lässt:

$$\Rightarrow I_{cl}(\alpha) \simeq \frac{1}{2}S \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \underbrace{\frac{3(M_{max} - M_{min})}{4\pi R^3}}_{\overline{\rho_{int}}} n_{cl,0} \frac{M_H^{1,9}}{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{(r^2+r_\odot^2-2rr_\odot \cos(\alpha))}}{l_{sc}} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (54)$$

Nun gibt es noch ein Problem, die Normierungskonstante $n_{cl,0}$ und die Halomasse hoch 1,9. Für den späteren Vergleich sollten die betrachteten Funktionen die gleichen Einheiten und somit Größenordnungen aufweisen. Deshalb müsste in diesem Fall folgendes gelten:

$$n_{cl,0} \cdot M_H^{1,9} = \left[\frac{1}{cm^3} \right] [GeV^{1,9}] \stackrel{!}{=} \left[\frac{GeV}{cm^3} \right] \equiv \rho_0.$$

Für die Berechnung bietet es sich nun an die Halomasse hoch 1,9 auf ungefähr eins zu nähern, sodass sich erneut die bereits bekannte Halodichte ρ_0 verwenden lässt. Das Signal für große Klumpen kann somit folgendermaßen motiviert werden:

$$\Rightarrow I_{cl}^{gro\beta}(\alpha) \simeq \frac{1}{2}S \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \overline{\rho_{int}} \rho_0 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{(r^2+r_\odot^2-2rr_\odot \cos(\alpha))}}{l_{sc}} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (55)$$

l_{sc} ist hier wieder ein Skalierungsfaktor und vergleichbar mit R' aus ((50) und (51)), er beträgt nach [9] 10 *kpc*, und ergibt sich aus einer Simulation.

3.4.4 Annihilationssignal durch ungeklumpte dunkle Materie

Für die ungeklumpte dunkle Materie wird Gleichung (31) bzw. (32) einfach analog in Gleichung (43) eingesetzt dies ergibt:

$$I_{hom}^{NFW}(\alpha) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\langle \sigma_{ann} v \rangle}{m_\chi^2}}_{\equiv 1} \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \left(\frac{\rho_0}{\left(\frac{\sqrt{(r^2+r_\odot^2-2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{(r^2+r_\odot^2-2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'} \right)^2} \right)^2 \quad (56)$$

und schließlich für das Moore-Dichteprofil:

$$\Rightarrow I_{hom}^{Moore}(\alpha) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\langle \sigma_{ann} v \rangle}{m_\chi^2}}_{\equiv 1} \int_0^{r_{max}(\alpha)} dr \left(\frac{\rho_0}{\left(\frac{\sqrt{(r^2+r_\odot^2-2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{(r^2+r_\odot^2-2rr_\odot \cos(\alpha))}}{R'} \right)^{\frac{3}{2}} \right]} \right)^2 \quad (57)$$

3.4.5 Neutrinosignal aus dunkler Materie

Das erwartete differentielle Neutrinosignal wird schließlich mit der folgenden Formel [12] berechnet:

$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dE} = \frac{1}{2} I(\alpha) \frac{1}{4\pi} \frac{dN}{dE}. \quad (58)$$

Mit Hilfe der DarkSUSY Simulations-Software wird das Energiespektrum dN/dE der annihilierenden dunklen Materieteilchen in Teilchen aus dem Standardmodell beschrieben [12], mit einem maximalen und minimalen Energiespektrum. Der Faktor $1/4\pi$ folgt aus der isotropen Emission der Teilchen und $I(\alpha)$ ist bereits bekannt.

3.4.6 Ergebnisse und Diskussion

Aus den oben gezeigten Gleichungen lässt sich der im Folgenden zu sehende Verlauf des Annihilationssignals von kleinen und großen Klumpen sowie der ungeklumpten Materie berechnen. Des Weiteren wird der Verstärkungsfaktor gezeigt und analysiert.

In der ersten Abbildung (12), wird der Vergleich zwischen geklumpfter und ungeklumpfter Materie präsentiert. Die Graphen werden mit dem NFW-Dichteprofil berechnet. Das Signal durch ungeklumpte dunkle Materie fällt innerhalb von wenigen Winkelerhöhungen sehr stark ab. Ab etwa 10° schwächt sich der Abfall erst langsam dann ab 20° bis hin zu 40° immer stärker ab. Bis schließlich ab etwa 50° eine nur noch sehr geringe Änderung sichtbar ist. Das Signal für geklumpfte Materie dagegen fällt sehr viel langsamer ab. Bis etwa 17° ist der Abfall am größten und reduziert sich anschließend bis etwa 120° . Ab diesem Winkel ist auch hier keine große Änderung mehr registrierbar. Auffällig ist in diesem Plot, dass das Signal der Klumpung weitaus größer ist als das der ungeklumpten Materie.

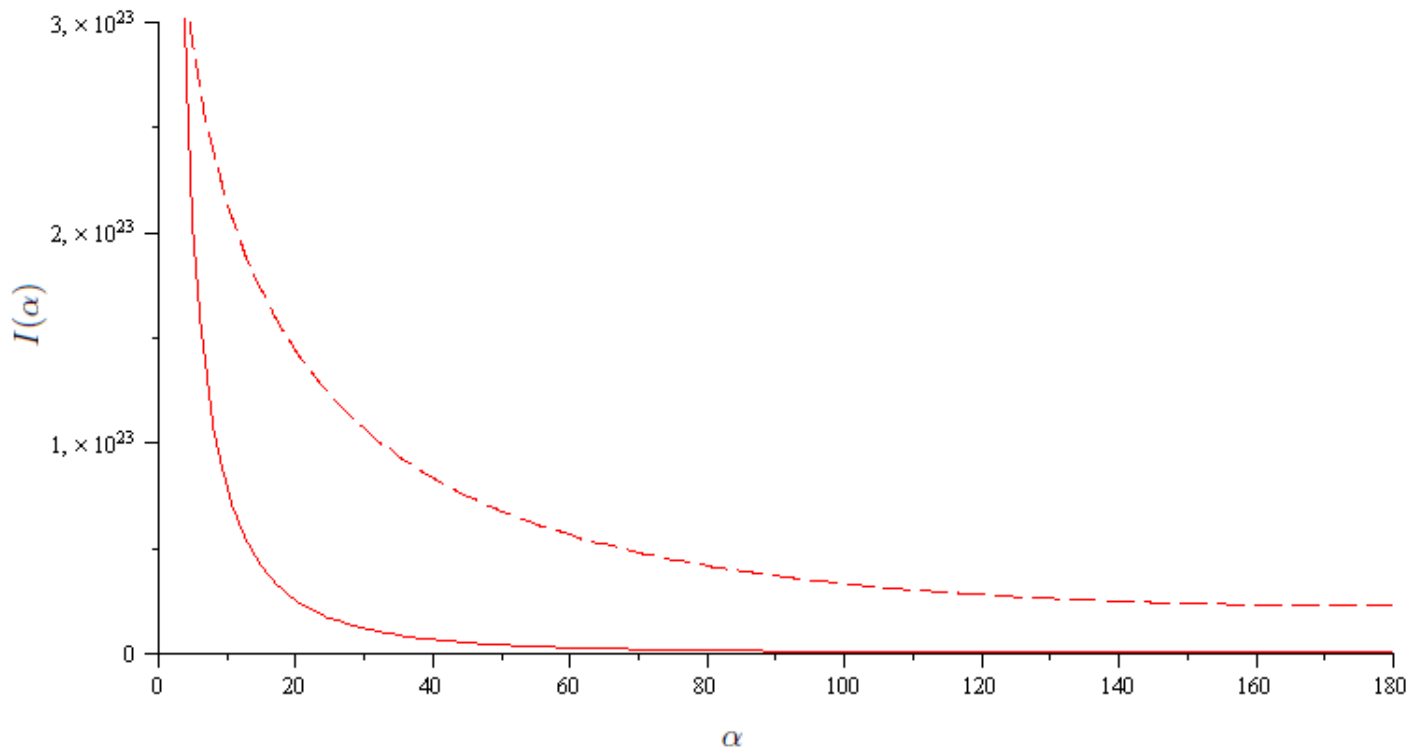


Abbildung 12: Annihilationssignal aus ungeklumpfter Materie mit NFW-Dichteprofil $I_{hom}^{NFW}(\alpha)$ (durchgezogene Kurve), und geklumpfter Materie $I_{cl}^{NFW}(\alpha)$ (gestrichelte Kurve).

Im Fall des in der nächsten Abbildung (13) zu sehenden Signals, dass mit dem Moore-Dichteprofil berechnet wurde, sieht der Verlauf ähnlich aus. Die Graphen aus Abbildung (11) sind sozusagen nur etwas nach rechts verschoben und das Signal ist minimal größer. Der starke Abfall für die ungeklumpte Materie schwächt sich erst ab etwa 20° ab. Danach reduziert er sich weiter bis 70° und an 80° ist die Veränderung kaum noch wahrnehmbar. Für das Signal aus der Klumpung ändert sich im Vergleich zum NFW Profil nur die Stärke des Signals. Bei 20° zum Beispiel zeigt das NFW-Signal einen Wert von $1,5 \cdot 10^{23}$ und das Moore-Signal einen von $4 \cdot 10^{23}$. Im etwa konstanten Bereich ab 120° kann beim NFW-Signal ein Wert von $0,5 \cdot 10^{23}$ und beim Moore-Signal dagegen ein doppelt so großer Wert abgelesen werden. Der grobe Verlauf der Kurven ist jedoch größtenteils gleich.

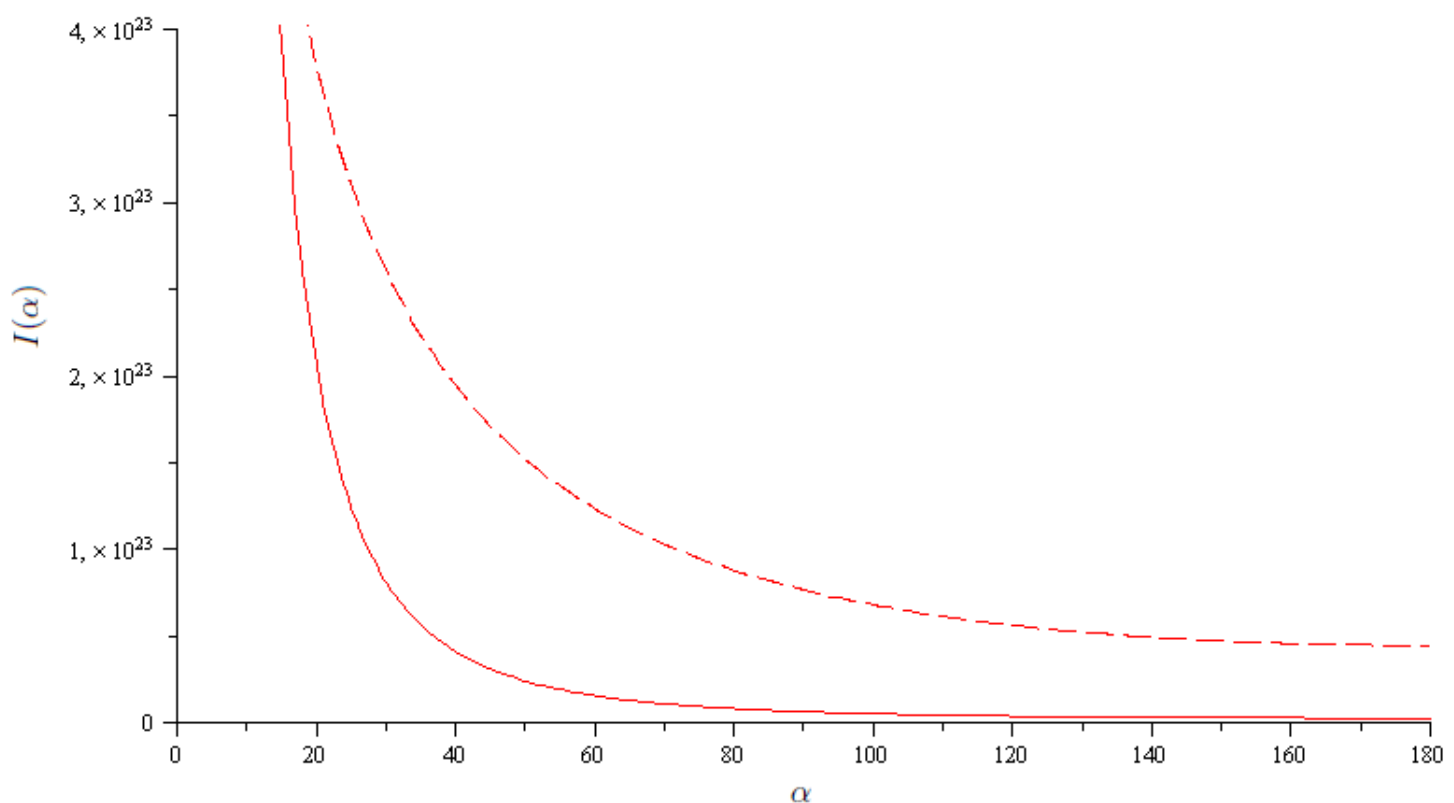


Abbildung 13: Annihilationssignal aus ungeklumpfter Materie mit Moore-Dichteprofil $I_{hom}^{Moore}(\alpha)$ (durchgezogene Kurve), und geklumpfter Materie $I_{cl}^{Moore}(\alpha)$ (gestrichelte Kurve).

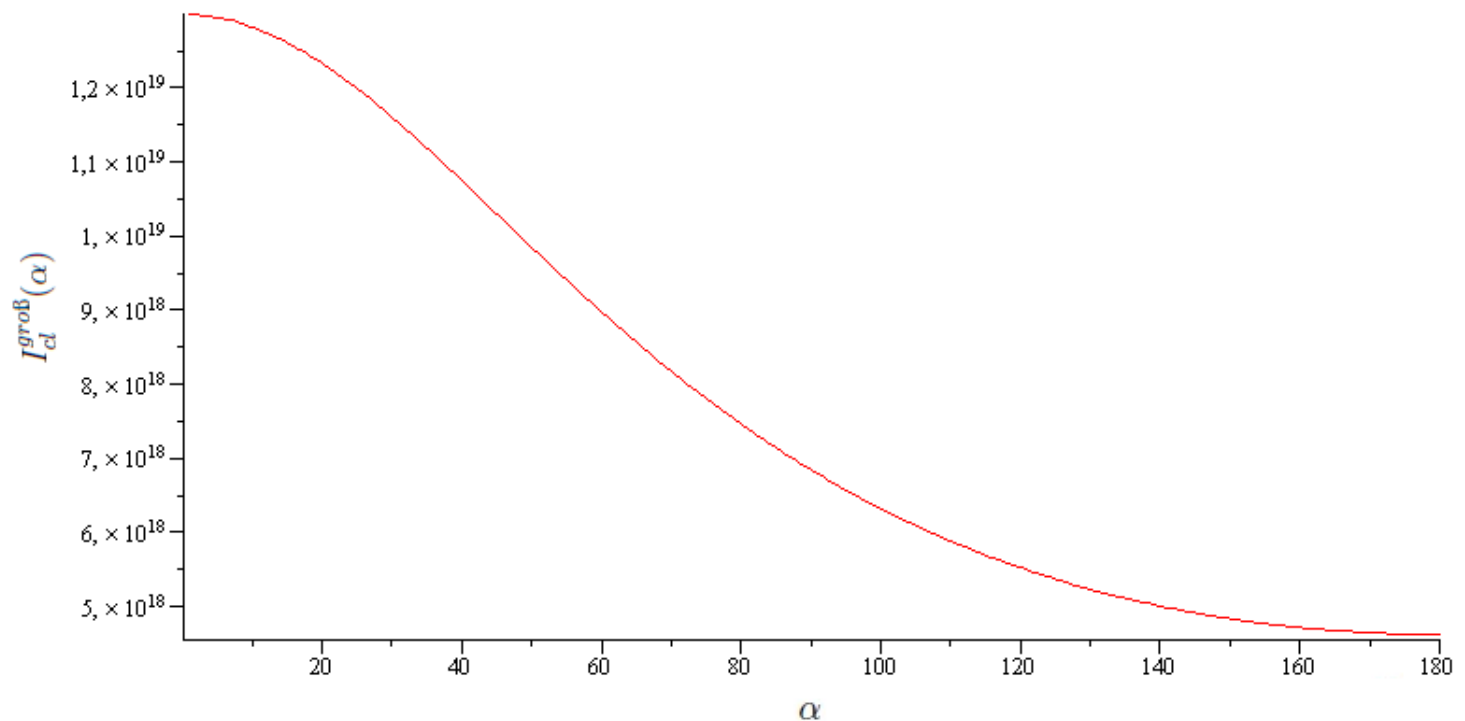


Abbildung 14: Annihilationssignal aus dunkler Materie auf großen Skalen. $I_{cl}^{groB}(\alpha)$ gegen den Winkel α

In Abbildung (14) ist das Signal, verursacht durch geklumppte dunkle Materie auf großen Skalen zu sehen. Hier ist besonders die Größenordnung der Signalstärke von 10^{19} auffällig. Die Kurve fällt ausgehend von einer anfänglichen Plateauphase ab 7° bis zum Ende hin ab.

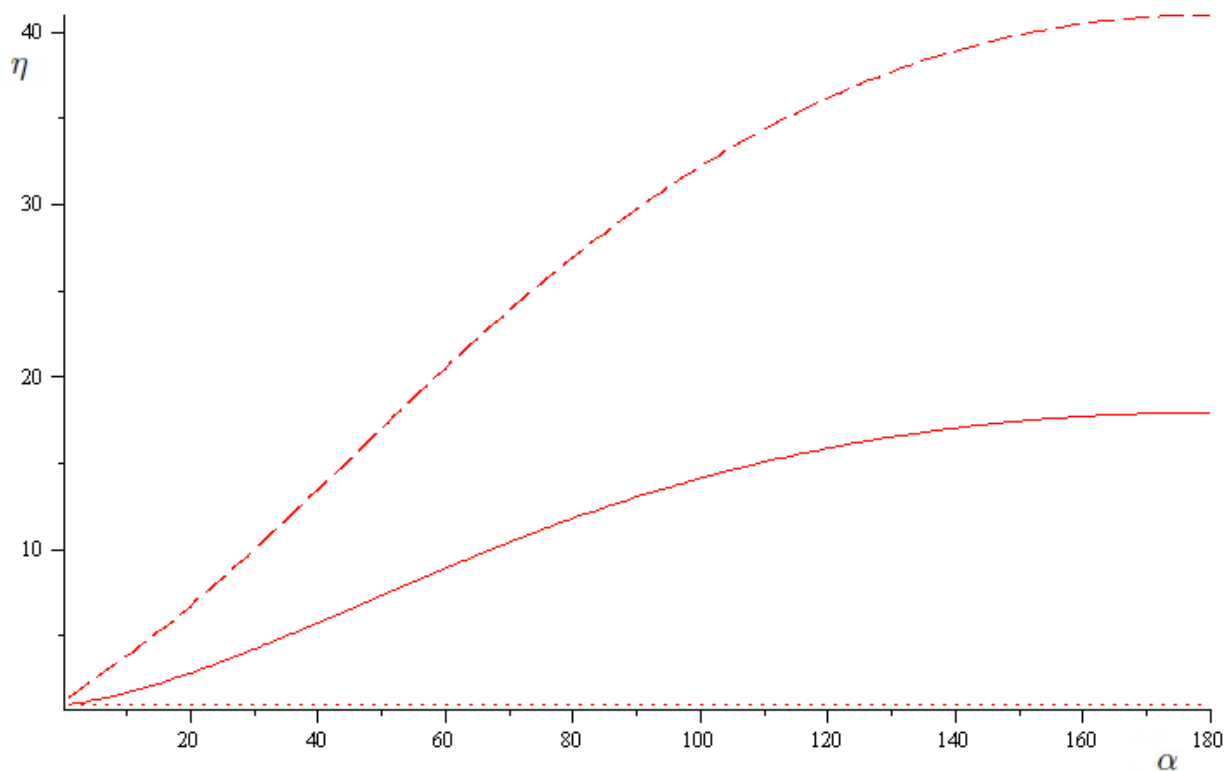


Abbildung 15: Verlauf der Verstärkungsfaktoren berechnet mit dem Moore-Dichteprofil (gestrichelte Linie), NFW-Dichteprofil (durchgezogene Linie) und der dunklen Materie auf großen Skalen (gepunktete Linie), gegen den Winkel α

In der letzten Abbildung dieses Kapitels ist der Verstärkungsfaktor in Abhängigkeit vom Winkel α zu sehen. Wie aus den obigen Plots zu erwarten ist, ist die Verstärkung durch das Moore-Dichteprofil am größten. Fast halb so groß ist der durch das NFW-Dichteprofil. Die durch Klumpung auf großen Skalen hervorgerufene Verstärkung ist im Vergleich sehr gering, oder fast gar nicht nachweisbar. Besonders deutlich geht aus diesem Plot die allgemeine Verstärkung des Signals durch die Anwesenheit der Klumpung auf kleinen Skalen hervor. Dieser steigt von Beginn der Winkelskala bis zum Ende hin an. Der größte Anstieg der Verstärkung tritt dabei zwischen 50° und 80° auf. Für das Moore-Dichteprofil

beträgt der maximale Faktor ein Wert von 40 für das NFW-Dichteprofil ein Wert von etwa 17, also in etwa doppelt so viel.

Zusammenfassend wird deutlich, dass der erwartete Teilchenfluss durch die Klumpung immer über dem der ungeklumpten Materie liegt. Zu dieser Flussverstärkung tragen nur kleine Klumpen mit großer Dichte bei, die großen Klumpen sind vergleichsweise uninteressant. Des Weiteren steigt die Flussverstärkung mit wachsendem Winkel α durchgehend an und erreicht einen maximalen Wert bei einem maximalen Winkel von 180° .

4 Vergleich mit experimentellen Daten des IceCube-22

Im folgenden und letzten Abschnitt werden Daten des IceCubes Detektors betrachtet. Diese Daten wurden in 275.7 Tagen in den Jahren 2007 - 2008 aufgenommen. Der Aufnahmebereich umfasst die nördliche Hemisphäre mit dem Deklinationswinkel δ im Intervall $[-5^\circ, 85^\circ]$ und einer Datenrate von 5114 möglichen Neutrino-Sample Ereignisse mit hoher Reinheit. Das Ziel bei der Auswertung dieser Daten ist es eine Datenrate (Events bzw. Ereignisse) in Abhängigkeit des Winkels α aufzutragen. Der Winkel α beschreibt erneut die Winkeldistanz zwischen dem Galaktischen Zentrum und einem Punkt im Halo. Zunächst werden einige wichtige Definitionen der Astronomie für dieses physikalische Problem verdeutlicht. Anschließend werden die Umrechnung der aufgenommenen Daten durchgeführt und zum Schluss folgt ein Vergleich mit der theoretischen Annahme.

4.1 Grundlagen

Um die verschiedenen Größen: $RA = right\ ascension$ und $Dec = Declination$ verstehen zu können, betrachten wir die folgende Skizze:

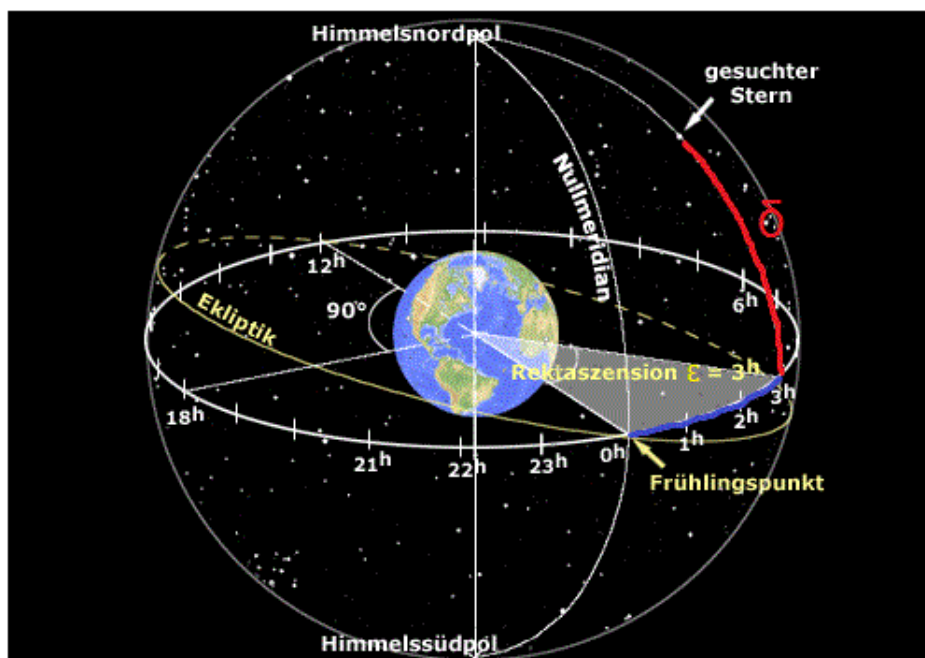


Abbildung 16: Verdeutlichung der Winkel: δ Deklinationswinkel in Grad (Rot) und Rektaszension $RA = \epsilon$ in Bogenstunden (Blau).

Darin beschreibt der Winkel ϵ die Rektaszension (right ascension (RA)), dies wird auch als Azimutwinkel äquatorialen Koordinatensystem beschrieben. Er beginnt beim Frühlingspunkt und läuft dann 360 Grad um die Erde herum. Der Winkel δ wird als Deklinationswinkel (declination (Dec)) bezeichnet und ist der Zenitwinkel im äquatorialen Koordinatensystem. Dieser wird vom Himmels-Äquator in Richtung des Nordpols gemessen.

Da in der Umrechnung der Daten die Winkeldistanz von dem Galaktischen Zentrum zu einem Punkt auf der nördlichen Hemisphäre betrachtet wird, werden die Koordinaten des Galaktischen Zentrums in (RA, Dec) auf der Erde

benötigt. Diese betragen $(17\text{ h }45\text{ min }40,04\text{ s}, -29^\circ)$, dies entspricht auch $(266^\circ, -29^\circ)$ [12]. Für eine anschauliche Verdeutlichung soll die nächste Abbildung in Betracht gezogen werden. Das Galaktische Zentrum befindet sich auf der südlichen Hemisphäre, dies ist eine Projektion der eigentlichen Position des Zentrums im Universum. Das heißt von der Erdoberfläche aus betrachtet, würde es fast senkrecht dazu stehen. Des Weiteren ist in der Abbildung der Winkel α , der Winkel zwischen der Richtung zum Galaktischen Zentrum und einem detektierten Neutrino bzw. Teilchen. Dies ist der gesuchte Winkel und äquivalent zu dem bekannten aus dem Sichtlinienintegral. Die Ringe um das Galaktische Zentrum symbolisieren die verschiedenen Sichtkegel von der Position auf der Erde. In der Rechnung weiter unten wird davon ausgegangen, dass diese Ringe ebenfalls auf die Erdkugeloberfläche projiziert werden.

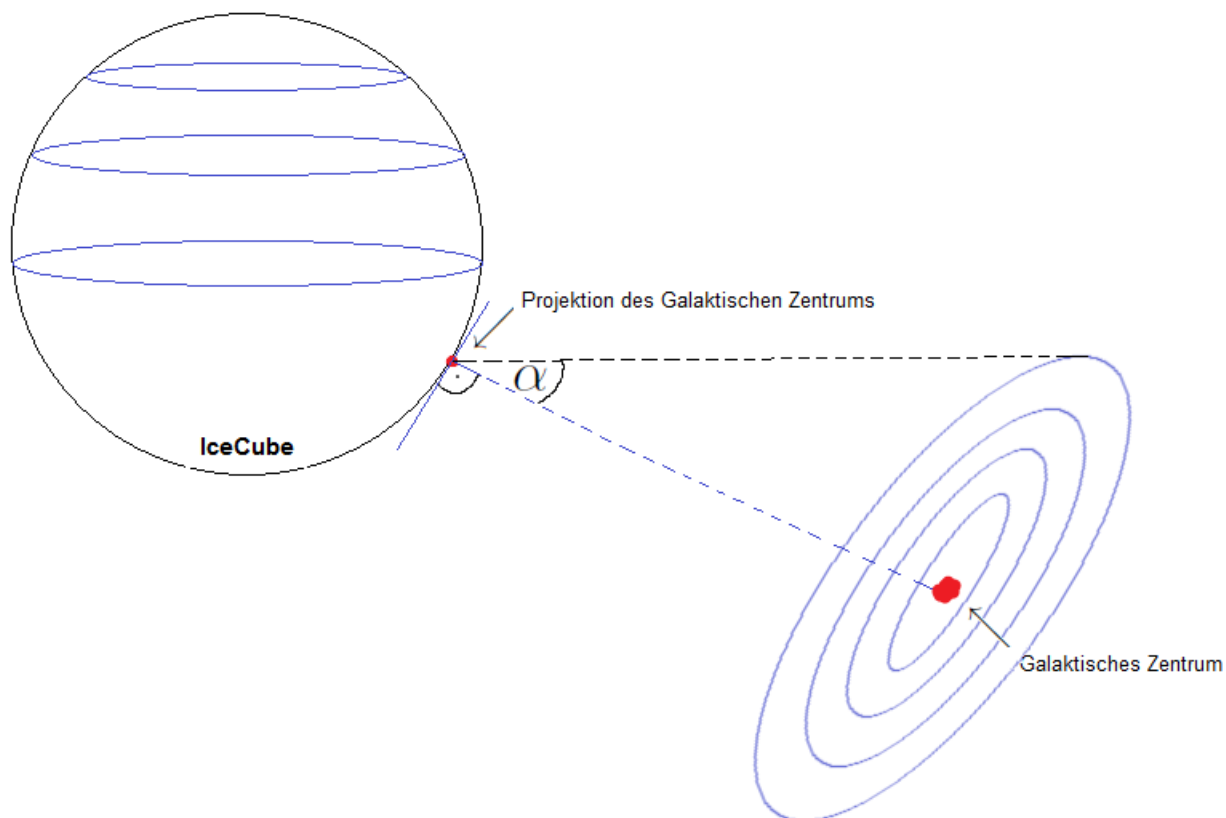


Abbildung 17: Definition bzw. Verdeutlichung des Winkels α als Abstand vom Galaktischen Zentrum. Dabei symbolisiert die Kugel auf der linken Seite die Erde und der große rote Punkt auf der rechten Seite das Galaktische Zentrum. Die Ringe um das Zentrum zeigen den Abstand mit einem jeweiligen Winkel α . Der kleine rote Punkt beschreibt die Projektion des Galaktischen Zentrums auf die Erde. Am Südpol befindet sich der IceCube-Detektor.

4.2 Berechnung

Für die Umrechnung wurden die in der nächsten Abbildung (18) zu sehenden Daten verwendet. Auf der linken Seite sind die Ereignisse in der horizontalen Ebene, d.h. in Abhängigkeit von der Rektaszension aufgezeichnet. Diese zeigen eine Gleichverteilung im Rahmen der Fehler. Auf der rechten Seite sind die Ereignisse in Abhängigkeit von dem Deklinationswinkel aufgetragen. Hier wird ein deutlich abfallender Trend der Ereignisse für einen zunehmenden Winkel deutlich. Dabei ist zu beachten, dass die Winkel jeweils in Rad angegeben sind und es sich um differentielle Histogramme handelt.

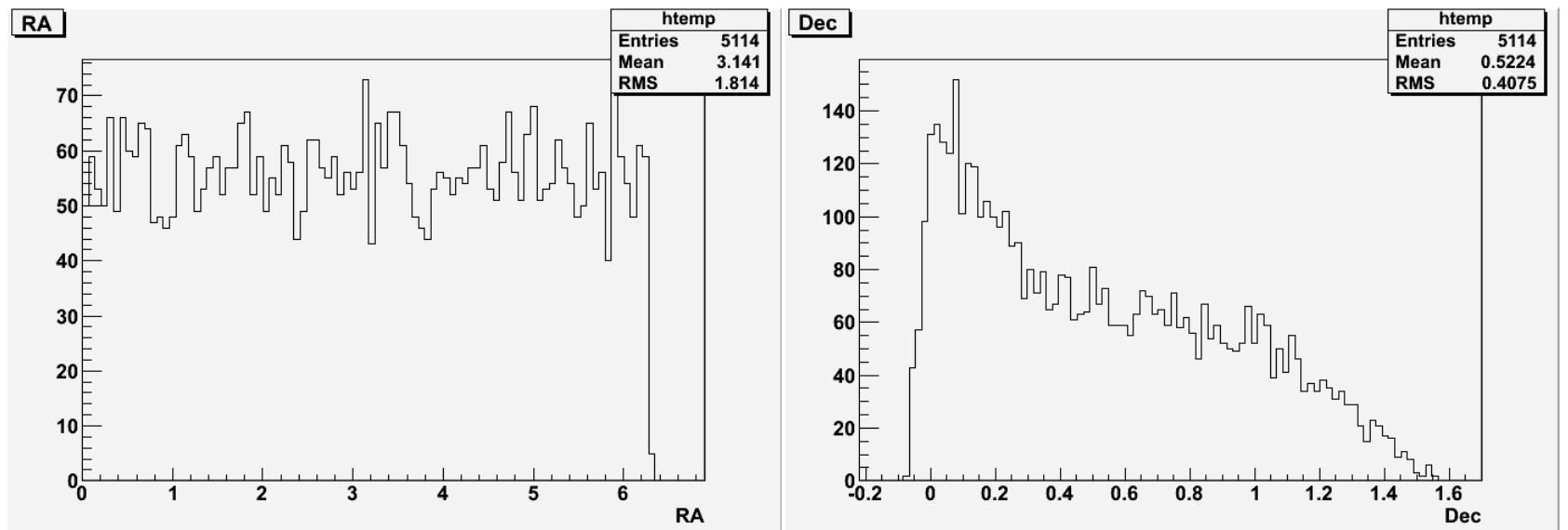


Abbildung 18: Auf der linken Seite sind die Ereignisse gegen die Rektaszension in Rad zu sehen und auf der rechten Seite die Ereignisse gegen Deklinationswinkel in Rad. Es handelt sich um differenzielle Histogramme.

Da der Punkt des Galaktischen Zentrums auf der Himmels-Kugel liegt, bietet es sich an für das weitere Vorgehen an Kugelkoordinaten einzuführen und den gesuchten Winkel letztendlich über Vektoren zu berechnen. Dazu werden zwei Einheitsvektoren konstruiert, einer geht von dem Mittelpunkt der Kugel zu dem Ort des Galaktischen Zentrums auf der Kugeloberfläche und der zweite Einheitsvektor zeigt zu einem Punkt, an dem ein Ereignis bzw. Teilchen detektiert wird. Die folgende Skizze zeigt beide Einheitsvektoren, den gesuchten (eingeschlossenen) Winkel und die beiden Standardwinkel der Kugelkoordinaten:

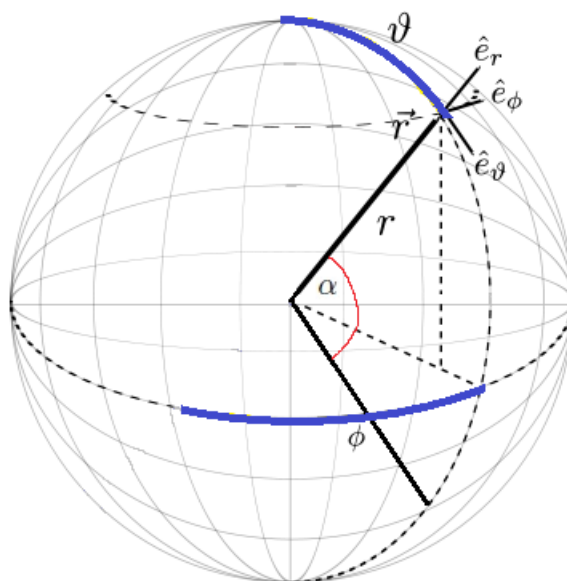


Abbildung 19: Verdeutlichung des gesuchten Winkels α als Abstand vom Galaktischen Zentrum (GZ), sowie Darstellung der Kugelkoordinaten, deren Winkel θ , ϕ und deren Einheitsvektoren \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_ϕ .

Zunächst werden die Kugelkoordinaten eingeführt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\vec{e}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial i}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} \right\|},$$

wobei $i = r, \theta, \phi$ ist, folgt der Einheitsvektor in Richtung von r :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren lässt sich mit dem Skalarprodukt berechnen:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \cos(\alpha) \cdot |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}.$$

Der Zähler ergibt sich zu:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta_{GZ}) \cos(\phi_{GZ}) \\ \sin(\theta_{GZ}) \sin(\phi_{GZ}) \\ \cos(\theta_{GZ}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta_{GZ}) \cos(\phi_{GZ}) + \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta_{GZ}) \sin(\phi_{GZ}) + \cos(\theta) \cos(\theta_{GZ})$$

$$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = \sin(\theta) \sin(\theta_{GZ}) \cdot (\cos(\phi) \cos(\phi_{GZ}) + \sin(\phi) \sin(\phi_{GZ})) + \cos(\theta) \cos(\theta_{GZ})$$

Mit dem Additionstheorem $\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$ folgt somit:

$$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = \sin(\theta) \sin(\theta_{GZ}) \cdot (\cos(\phi - \phi_{GZ})) + \cos(\theta) \cos(\theta_{GZ})$$

Für den Nenner ergibt sich:

$$|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| = |\vec{e}_r| \cdot |\vec{e}_r| = \left| \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} \sin(\theta_{GZ}) \cos(\phi_{GZ}) \\ \sin(\theta_{GZ}) \sin(\phi_{GZ}) \\ \cos(\theta_{GZ}) \end{pmatrix} \right|$$

$$\Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = \sqrt{\sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + \cos^2(\theta)} = 1.$$

Der gesuchte Winkel kann also durch:

$$\cos(\alpha) = \sin(\theta) \sin(\theta_{GZ}) \cdot (\cos(\phi - \phi_{GZ})) + \cos(\theta) \cos(\theta_{GZ})$$

berechnet werden. Da in den IceCube Daten die Ereignisse von dem Deklinationswinkel bzw. von der Rektaszension abhängen, müssen die Winkel der Kugelkoordinaten dementsprechend umgerechnet werden. Der Winkel θ ist wie in Abbildung (19) zu sehen, von der Nordpolachse zum Äquator definiert, der Deklinationswinkel dagegen genau umgekehrt. Deshalb lässt sich θ mit dem Deklinationswinkel durch:

$$\theta = 90 - \delta$$

ausdrücken. Für den Winkel ϕ in der horizontalen Ebene folgt einfach $\phi = RA$. Insgesamt lässt sich der Winkel α mit der folgenden Formel bestimmen:

$$\cos(\alpha) = \sin(90 - \delta) \sin(90 - (-29)) \cdot (\cos(RA - 266)) + \cos(90 - \delta) \cos(90 - (-29)), \quad (59)$$

und da die Winkel in Rad angegeben sind:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) = \sin \left(\left(90 \cdot \frac{180}{\pi} \right) - \delta \right) \sin \left((90 - (-29)) \cdot \frac{180}{\pi} \right) \cdot \cos \left(RA - \left(266 \cdot \frac{180}{\pi} \right) \right) \\ + \cos \left(\left(90 \cdot \frac{180}{\pi} \right) - \delta \right) \cos \left((90 - (-29)) \cdot \frac{180}{\pi} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

4.3 Vergleich

Die mit Gleichung (60) errechneten Daten sind in der folgenden Abbildung (20) zu sehen. Dabei werden die Ereignisse gegen die Größe $\cos(\alpha)$, also im Abstand zum Galaktischen Zentrum aufgetragen:

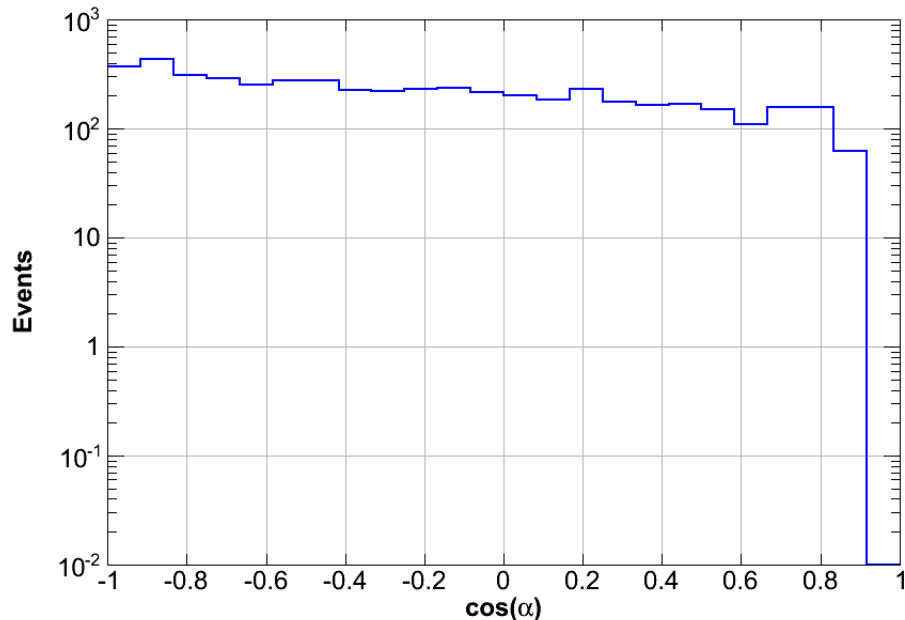


Abbildung 20: Umgerechnete Daten: Events (Ereignisse) gegen $\cos(\alpha)$. Das gezeigte Histogramm ist differentiell.

Es ist zu beachten, dass es sich hier um Background Neutrino Ereignisse handelt. Das eigentliche Signal durch mögliche dunkle Materieteilchen ist in diesen Daten also nicht enthalten. In der Abbildung (20) ist deutlich zu sehen das bis etwa 24° , wie erwartet, kein Signal aufgenommen wurde. Ab diesem Wert kommt es zu einem sprunghaften Anstieg der Teilchenereignisse. Bei etwa 80° wird ein Ereigniswert erreicht, der bis zum Ende des Aufnahmebereichs nicht mehr deutlich überschritten wird, die Signalstärke flacht also ab. In der nächsten Abbildung (21) wird das theoretische Modell des Annihilationssignal von ungeklumpeter dunkler Materie in Abhängigkeit des Winkels $\cos(\alpha)$ noch einmal gezeigt. Für den Vergleich dieser beiden Abbildungen ist zunächst nur der Verlauf der beiden Kurven von Bedeutung und der Winkelbereich von 20° bis 90° interessant, da dort die auffälligsten Veränderungen auftreten und in dieser Analyse nur die Nordhalbkugel betrachtet wird. Des Weiteren wird in dieser Analyse nur das NFW-Dichteprofil für geklumpete und ungeklumpete Materie verwendet, da dies die numerischen Berechnungen der Klumpung am besten beschreibt und deshalb hier ausreicht.

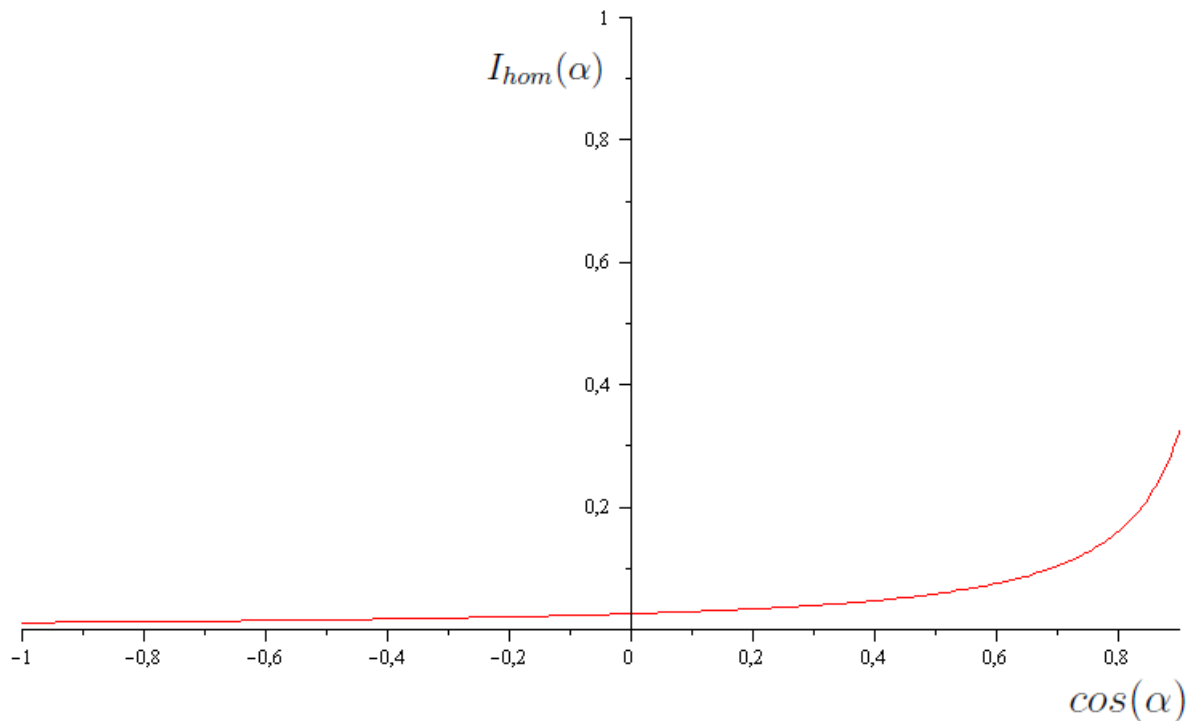


Abbildung 21: Theoretischer Verlauf des Annihilationssignals von ungeklumpfter dunkler Materie: $I_{hom}(\alpha)$ gegen $\cos(\alpha)$. Es handelt sich um ein unnormiertes differentielles Histogramm.

Wird die theoretische Vorhersage betrachtet, fällt auf, dass die erwartete Ereignisrate von Neutrinos aus dunkler Materie mit wachsendem Winkel abnimmt und nicht wie bei den Background Neutrinos, ansteigt. Dennoch ist die Änderung ab einem Winkel von etwa 25° bis 80° ähnlich. Das heißt in diesem Bereich steigt (Abb. 20) bzw. fällt (Abb. 21) die Neutrinoanzahl sichtbar. Ab einem Winkel von etwa 80° dagegen ändert sich die Eventrate nur noch minimal. Für die weitere Berechnung ist es jedoch sinnvoller die Events direkt gegen den totalen Winkel α aufzutragen. Deshalb sind noch einmal beide Größen in Abhängigkeit von α in der nächsten Abbildung zu sehen.

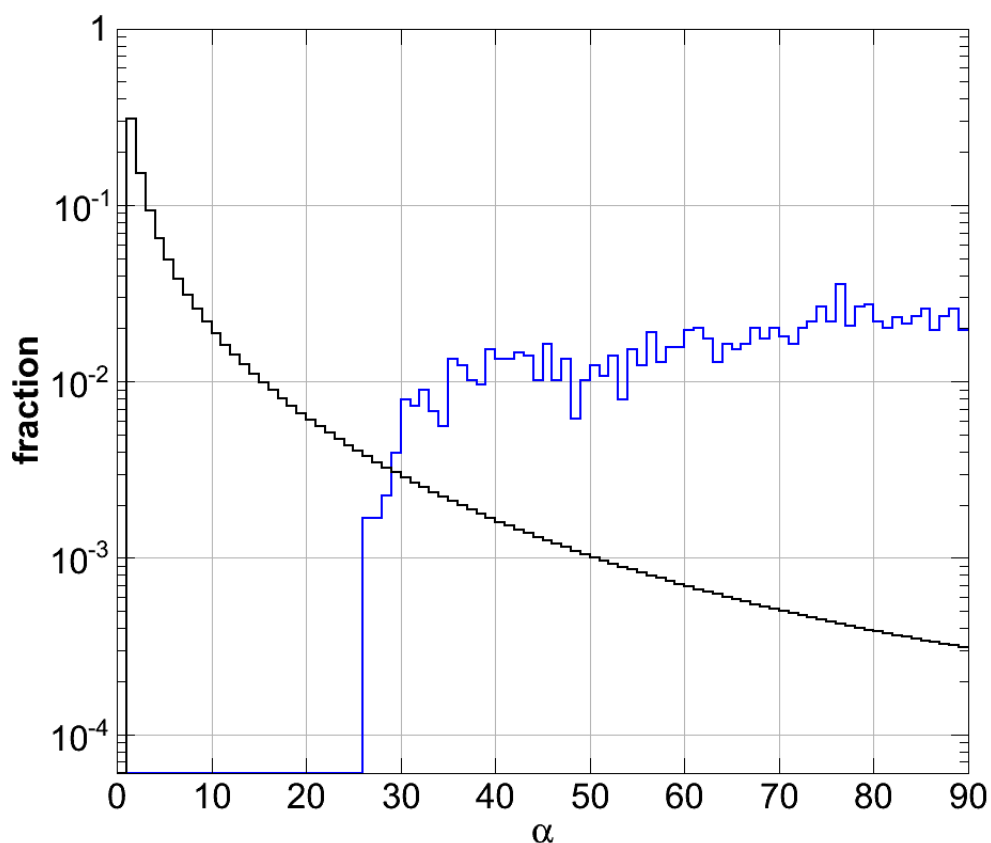


Abbildung 22: Der schwarze Graph repräsentiert das theoretische Halo Signal ungeklumpfter dunkler Materie, der blaue dagegen den Background. Das Aufnahmeintervall beginnt bei 28° und endet bei 90° für den Background. Beide Flächen unter den Graphen sind auf eins normiert und es handelt sich um ein differentielles Histogramm.

Um nun einen sinnvollen Vergleich dieser beiden Datensätze zu ermöglichen wird die Sensitivität abgeschätzt:

$$\sigma = \frac{S}{\sqrt{B}}, \quad (61)$$

dabei steht das S für das theoretische Signal siehe Abbildung (22) und B für die Background Ereignisse zu sehen in Abbildung (22). Um dieses Verhältnis zu berechnen, werden die Daten zunächst in ein kumulatives Histogramm eingelesen, damit die Histogramme direkt auf 1 normiert sind. Das Ergebnis ist in der folgenden Abbildung (23) zu sehen. Die rote Kurve beschreibt die gesuchte Sensitivität, die blaue Kurve die Background Daten (kumulativ) und schwarze Kurve die theoretischen Werte in kumulativer Auftragung. Das Winkelintervall wurde hier von 25° bis 90° gewählt. Gleichung (61) muss jedoch noch ein wenig angepasst werden, da die Events auf der Nordhalbkugel in bestimmten Bereichen detektiert wurden. Das heißt, die in Abbildung (17) zu sehenden Ringe um das galaktische Zentrum verlaufen auf der nördlichen Hemisphäre. Somit ergibt sich aus Gleichung (68):

$$\sigma(\alpha) = \frac{S(\alpha) \cdot A(\alpha)}{\sqrt{B(\alpha) \cdot A(\alpha)}} = S(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}}. \quad (62)$$

Die Fläche $A(\alpha)$ wird im anschließenden Abschnitt hergeleitet.

4.4 Theoretische Berechnung der “Ereignisringe bzw. sichtbaren Segmente”

Zur Berechnung der Kreisflächen auf der Kugeloberfläche eignet es sich zunächst eine Kugelkappe zu verwenden. Der Mittelpunkt liegt an der Stelle des Galaktischen Zentrums. Mit wachsendem Winkel α wird der Radius a der Kappe immer größer und deshalb überstreift ab einem Winkel $\alpha_c = 28^\circ$ das erste Stück der Kappe die Äquatorlinie. Von diesem kleinen Teil der Kappe muss nun die Oberfläche berechnet werden (blauer Bereich). Zur Veranschaulichung wird dieses geometrische Problem in der nachfolgenden Skizze demonstriert.

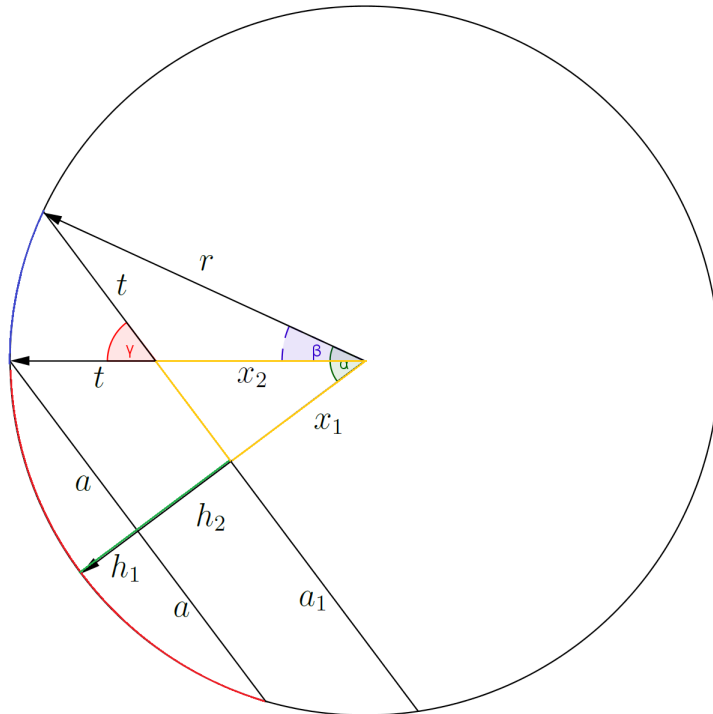


Abbildung 23: In dieser Abbildung ist ein Kugelquerschnitt zu sehen. Der Winkel α beschreibt den Abstand zum galaktischen Zentrum, der Winkel β ist der Öffnungswinkel ab dem Äquator ($\beta = \alpha - \alpha_c$). γ stellt den Winkel im Kugelzweieck dar, dass durch die blaue Oberfläche und die Radien t gekennzeichnet ist. Die Oberfläche der Kugelkappe bis zur Äquatorlinie ist in rot dargestellt der Radius wird mit a beschrieben, bei Vergrößerung a_i (hier a_1 .) Zusätzlich wird die Höhe der Kappe mit h_1 gekennzeichnet und bei weiterer Vergrößerung mit h_i (hier h_2 grün).

Die in der Abbildung zu sehende Fläche wird auch als die Fläche eines Kugelzweiecks bezeichnet. Aus der Skizze ergibt sich für den Radius a_i der Kappe:

$$a_i = r \sin(\alpha) \quad (63)$$

und für die Höhe h_i in Abhängigkeit von dem Winkel α :

$$h_i = r (1 - \cos(\alpha)). \quad (64)$$

Da die Oberfläche eines Kugelzweiecks berechnet werden soll, muss der benötigte Radius t berechnet werden. Hierfür wird die Länge von h_2 benötigt um x_1 erhalten zu können:

$$\begin{aligned} x_1 &= r - h_2 \\ \Rightarrow x_1 &= r - h_2 = r - r (1 - \cos(\alpha)). \end{aligned} \quad (65)$$

Für die Länge von x_1 fehlt nun noch x_2 . Mit Hilfe des gelben rechtwinkligen Dreiecks in Abbildung (23) kann mit einer einfachen trigonometrischen Umformung:

$$x_2 = \frac{x_1}{\cos(\alpha_c)}, \quad (66)$$

x_2 ermittelt werden. Einsetzen von Gleichung (65) in (66) ergibt:

$$x_2 = \frac{r - r (1 - \cos(\alpha))}{\cos(\alpha_c)}, \quad (67)$$

Schließlich folgt t unmittelbar aus (67) und:

$$\begin{aligned} t &= r - x_2 \\ \Rightarrow t(\alpha) &= r - \left[\frac{r - r (1 - \cos(\alpha))}{\cos(\alpha_c)} \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

In diesem Fall wird davon ausgegangen, dass beide Seiten in der Skizze in Abbildung (23) für t gleich lang sind. Dies ist auch gerechtfertigt für Winkel α bis 90° . Um nun die Fläche des Zweiecks zu berechnen wird die folgende Formel verwendet [17]:

$$A = \pi t^2 \frac{\gamma}{90^\circ}. \quad (69)$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = \pi \left(r - \left[\frac{r - r (1 - \cos(\alpha))}{\cos(\alpha_c)} \right] \right)^2 \frac{\gamma}{90^\circ}. \quad (70)$$

Wobei $\gamma = 90^\circ - \alpha_c = 62^\circ$ der durch die beiden Radien eingeschlossene Winkel ist. Dieser lässt sich aus dem gelben Dreieck und der Winkelsumme von 180° berechnen. Auffällig ist hier, dass dieser Winkel konstant ist. Das heißt, es ändert sich also nur der Radius des Zweiecks als Funktion von α . Da über die einzelnen Kreisringe auf der Nordhalbkugel integriert werden soll, kann aus den obigen Überlegungen, dieser Kreisteil ermittelt werden. Dazu wird der jeweilige Kreisteil auf der Nordhalbkugel mit Radius t benutzt. Dabei ist $\varphi = 180^\circ$ in der folgenden Formel, da es sich um einen Halbkreis handelt. Mit [18]

$$L_{Bogen} = 2\pi t \frac{\varphi}{360^\circ} = \pi t. \quad (71)$$

$$\Rightarrow L_{Bogen}(\alpha) = \pi \left(r - \left[\frac{r - r (1 - \cos(\alpha))}{\cos(\alpha_c)} \right] \right), \quad (72)$$

lässt sich jeder Kreisteil berechnen.

4.5 Ergebnisse

Werden die unter 4.4 genannten Bedingungen in die Berechnung der Sensitivität mit eingeschlossen, so folgt mit Gleichung (72) der folgende Graph für die Sensitivität. Zunächst beschreibt das theoretische Signal die Annihilation von ungeklumpter dunkler Materie aus dem Halo. Anschließend werden diese Graphen mit denen aus klumpender dunkler Materie verglichen. In beiden kumulativen Histogrammen wird deutlich, dass die Sensitivität im Bereich von 28° bis 90° erst leicht, dann stärker ansteigt und anschließend gegen eins wieder langsam abflacht. Bis etwa 50° steigt die Größe in beiden Fällen am stärksten an und ab 80° ist der Anstieg kaum registrierbar.

Werden die beiden verschiedenen unten zu sehenden Sensitivitäten in Ihren Anfangsgrößen verglichen, so fällt auf, dass der Anstieg im Fall der Klumpung bei 0,5 und im Fall der nicht geklumpten Materie bei 0,8 beginnt. Im letzteren Fall erreicht die Sensitivität also viel schneller ihren maximalen Wert.

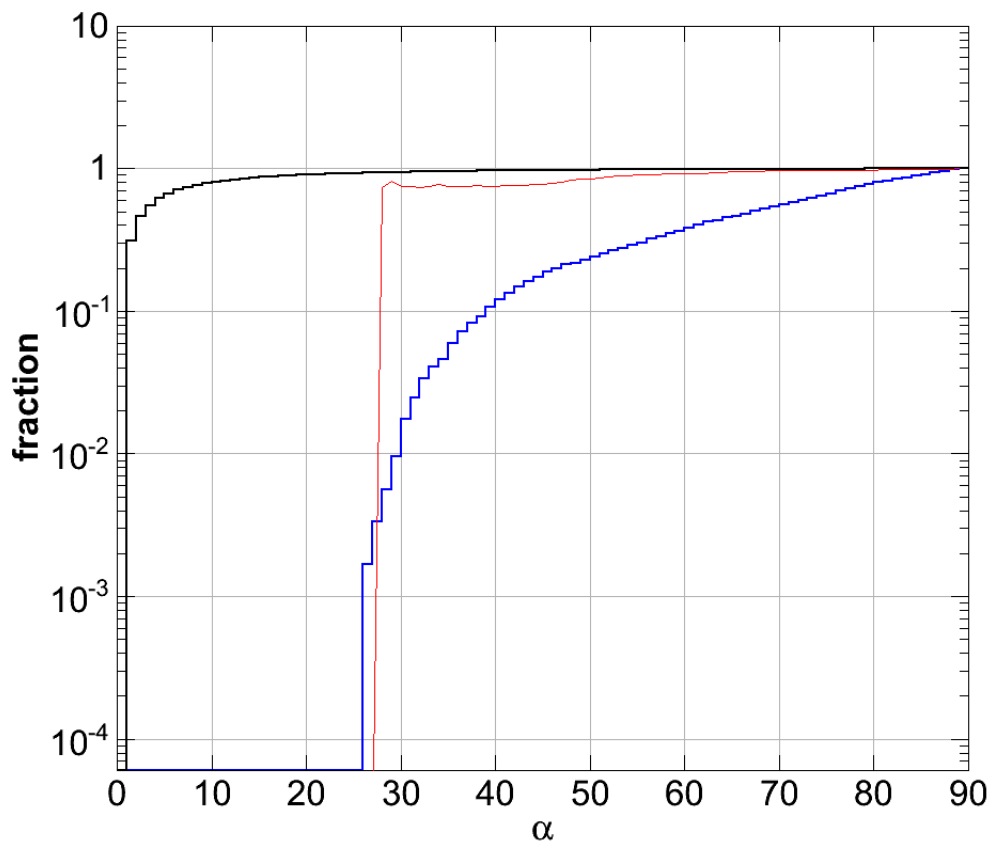


Abbildung 24: Kumulatives Histogramm in Abhängigkeit von α , die schwarze Kurve beschreibt das theoretische Signal aus ungeklumpter dunkler Materie im Halo, die blaue Kurve das Backgroundsignal. Der rote Graph zeigt den Verlauf der Sensitivität.

Zum Vergleich werden in der nächsten Abbildung die Daten der Klumpen gezeigt.

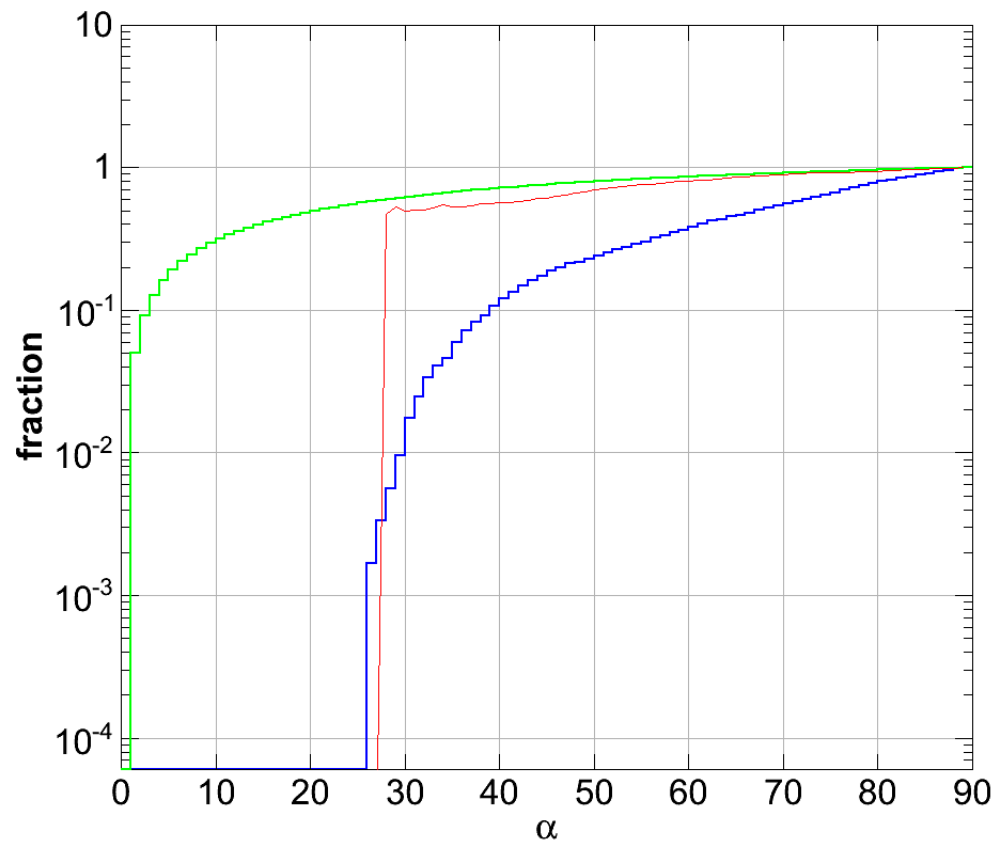


Abbildung 25: Kumulatives Histogramm in Abhängigkeit von α , die grüne Kurve beschreibt das theoretische Signal der Klumpung, die blaue Kurve das Backgroundsignal. Der rote Graph zeigt den Verlauf der Sensitivität.

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird deutlich, dass der thematische Bereich “dunkle Materie” sehr viel komplexer ist, als vielleicht zunächst angenommen. Zum einen ist nach heutigem Kenntnisstand noch nicht eindeutig geklärt, woraus sie wirklich besteht, dennoch ist ersichtlich, dass aus Teilchen dunkler Materie durch Annihilation, bereits bekannte Teilchen des Standardmodells wie Neutrinos entstehen können. Des Weiteren deutet vieles darauf hin, dass es heiße und kalte dunkle Materie zu geben scheint. Demnach ist nur kalte dunkle Materie in der Lage zu klumpen und somit Bereiche im Universum mit einer sehr viel höheren Dichtekonzentration zu bilden. Dabei kann dies auf kleinen Skalen in Massenbereichen von $10^{-12} \cdot M_{\odot} \leq M \leq 10 \cdot M_{\odot}$ aber auch auf großen Skalen mit Massen in Bereichen von $10^8 M_{\odot} \leq M \leq 2 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ geschehen. Bei der Analyse dieser Strukturen fällt auf, dass Klumpungen auf kleinen Skalen einen Kernbereich besitzen an dem die Dichte konstant ist und es möglich ist, diese durch interne Dichteprofile mit einer Proportionalität zu $r^{-\beta}$ zu beschreiben. Klumpungen auf großen Skalen ähneln dagegen so genannten “Clustern” die aus Tausenden von kleineren Klumpungen bestehen und weisen eine um sieben Größenordnungen kleinere mittlere interne Dichte auf. Wichtig ist zu begreifen, dass es sich bei der Klumpung um Quantenfluktuationen handelt, das heißt bezogen auf dieses Phänomen sind dies Dichtefluktuationen. In der frühen Entwicklungsphase der Galaxie kann die Klumpung durch überschüssige Energiezufuhr während der hierarchischen Clusterbildung zerstört werden. Ein anderer Aspekt für die Zerstörung ist durch die entstehende Galaktische Scheibe gegeben. Bei der Analyse dieser beiden Prozesse ist auffällig, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit $P(r)$ durch die Clusterbildung im Halo weitaus größer ist als durch die Galaktische Scheibe. Ein weiterer Trend für die Zunahme der Überlebenswahrscheinlichkeit ist durch die Abnahme der Massen von Klumpen auf kleinen Skalen ersichtlich.

Für die Verteilung der Klumpung $n_{cl}(l)$ auf kleinen Skalen folgt in recht guter Übereinstimmung mit numerischen Simulationen, dass diese proportional zum Dichteprofil des Halos ist. Im Vergleich zu Klumpungen auf großen Skalen ist die Anzahl pro Volumen für kleine Radien im Abstand vom Galaktischen Zentrum sehr viel größer, nimmt aber stattdessen schneller mit wachsendem Radius ab. Für die Berechnung des Annihilationssignals I_{cl} aus geklumpeter Materie wird diese Verteilung weiter benötigt, sowie die Rate der annihilierenden dunklen Materie- teilchen. Im Fall der ungeklumpten dunklen Materie I_{hom} ist das Annihilationssignal dagegen proportional zum Dichteprofil des Halos im Quadrat. Das berechnete Annihilationssignals ist dabei proportional zum später erwarteten Neutrinofluss. Bei dem Vergleich der beiden dunklen Materieformen, ist ersichtlich, dass das Annihilationssignal der geklumpten dunklen Materie über dem gesamten Winkelbereich vom Galaktischen Zentrum deutlich über dem der ungeklumpten Materie liegt. Dies liegt dementsprechend an der sehr viel höheren lokalen Dichtekonzentration in der jeweiligen Klumpung. Für die erweiterte Analyse wird zusätzlich der Verstärkungsfaktor durch die geklumpete Materie berechnet. Auch hier zeigt sich logischerweise eine deutliche Zunahme. Mit den verwendeten Werten liegt dieser bei etwa 20 für das NFW-Dichteprofil und bei 40 für das Moore-Dichteprofil. Der Verstärkungsfaktor durch die Klumpung auf großen Skalen ist dagegen vernachlässigbar klein und liegt bei 1.

Im Letzten Abschnitt dieser Arbeit werden Daten des IceCubes Detektors, die aus der nördlichen Hemisphäre stammen, mit den theoretischen Annahmen der geklumpten und ungeklumpten dunklen Materie verglichen. Dazu wird eine Sensitivität in Abhängigkeit vom Winkelabstand α des Galaktischen Zentrums bis maximal 90° , als Quotient aus theoretischen und experimentellen Daten, eingeführt. Diese zeigt ab dem Äquator einen erst stärker, dann immer weiter abflachenden Anstieg. Wird nun der Fall der geklumpten mit der ungeklumpten Materie verglichen, so ist dieser Kurvenverlauf sehr viel ausgeprägter. Jedoch flacht die Kurve in beiden Fällen ab maximal 80° ab und wächst nicht weiter an.

Abschließend lässt sich sagen, dass dieses Thema sehr interessant und aktuell ist, aber auch noch sehr viele Unsicherheiten beinhaltet, besonders im Bezug auf die wirkliche Entstehung der Klumpung. Dennoch wird der Aspekt der Entstehung des Universums, der dunklen Materie, sowie der dunklen Energie in der nächsten Zukunft sicherlich eines der wichtigsten Themen im Bereich der Physik sein.

6 Literatur

- [1] Peter Schneider, 2008, *Einführung in die Extragalaktische Astronomie und Kosmologie*.
- [2] Salman Habib, *Los Alamos Science Number 25*, 80-90, (1997).
- [3] Veniamin Berezhinsky, Vyacheslav Dokuchaev and Yury Eroshenko, *Destruction of small-scale dark matter clumps in the hierarchical structures and galaxies*, 2006, arXiv:astro-ph/0511494v2.
- [4] Andreas Müller, http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt_t04.html
- [5] Veniamin Berezhinsky, Vyacheslav Dokuchaev and Yury Eroshenko, *Small-scale clumps in the galactic halo and dark matter annihilation*, 2004, arXiv:astro-ph/0301551v3.
- [6] Veniamin Berezhinsky, Vyacheslav Dokuchaev and Yury Eroshenko, *Remnants of dark matter clumps*, 2008, arXiv:0712.3499v2 [astro-ph].
- [7] Stephen Hawking, 1988, *Eine kurze Geschichte der Zeit*, Kapitel 1, 2, 3.
- [8] V. Berezhinsky, V. Dokuchaev, Yu. Eroshenko, M. Kachelrie, and M. Aa. Solberg, *Annihilations of superheavy dark matter in superdense clumps*, 2010, arXiv:1002.3445v2 [astro-ph. GA].
- [9] Roberto Aloisio, Pasquale Blasi, Angela V. Olinto, *Gamma-Ray Constraints on Neutralino Dark Matter Clumps in the Galactic Halo*, 2003, arXiv:astro-ph/0206036v2.
- [10] Navarro, J.F., Frenk, C.S., White, S.D.M., *The Structure of Cold Dark Matter Halos*, 1995, astro-ph/9508025.
- [11] Moore, B., Quinn, T., Governato, F., *Cold collapse and the core catastrophe*, 1999, astro-ph/9903164v1.
- [12] Carsten Rott, *Search for Dark Matter from the Galactic Halo with IceCube*, 2009, arXiv:0912.5183v1 [astro-ph.HE].
- [13] Bergstrom, Goobar, 1999, *Cosmology and Particle Astrophysics*.
- [14] Hans V. Klapdor-Kleingrothaus, Kai Zuber, 1997, *Teilchenastrophysik*.
- [15] Edward Kolb, Michael Turner, 1994, *The Early Universe*.
- [16] Gianfranco Bertone, Dan Hooper and Joseph Silk, *Particle Dark Matter: Evidence, Candidates and Constraints*, 2004, arXiv:hep-ph/0404175v2.
- [17] Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig, 1993, *Taschenbuch der Mathematik*, Auflage 6, Seite 166.
- [18] Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig, 1993, *Taschenbuch der Mathematik*, Auflage 6, Seite 144.