

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN (RWTH)

Impuls- und Spintracking in elektromagnetischen Feldern

VON
Tobias Klerks

Bachelorarbeit in Physik

vorgelegt der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der RWTH Aachen

im Oktober 2012

angefertigt am III. physikalischen Institut B

bei

Prof. Dr. Pretz

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst
und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt
sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Aachen, den

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie	1
2.1	Beschleunigerphysik	1
2.1.1	Synchrotron	2
2.1.2	Speicherring	2
2.2	Wienfilter	2
2.3	Spin-Dynamik	3
3	Vorstellung eines Experimentes zur Suche nach permanenten elektrischen Dipolmomenten	3
3.1	Einleitung	3
3.2	Grundlagen der Suche nach EDM	5
3.3	Der radiofrequentierte elektrische Flipper	6
3.3.1	Funktionsweise	6
3.3.2	Aufbau des EDM-Signals	6
3.3.3	Korrektur der Spin-Tune Frequenz	9
3.3.4	Korrektur für Teilchenpakete	10
3.3.5	Nullexperiment	12
3.4	Schlussfolgerung	12
4	Berechnung des elektrischen Feldes eines Plattenkondensators	13
5	Das Runge-Kutta-Verfahren	14
6	Untersuchung der Teilchenlaufbahn und des Spins	16
6.1	Einleitung	16
6.2	Mathematische Vorbereitungen	16
6.3	Ablenkung des Teilchens im elektrischen Feld	18
6.4	Teilchen und Spinbetrachtung mit Wienfilter	19
6.5	Betrachtung einer abweichenden Eintrittsposition	22
6.6	Auswirkungen des Randfeldes auf die Spindrehung	25
6.7	Fazit	28

1 Einleitung

In der Bachelorarbeit zum Thema „Impuls- und Teilchentracking in elektromagnetischen Feldern“ untersuche ich qualitativ die Effekte, die das elektrische Randfeld eines Plattenkondensators auf die Drehung des Spins und auf die Teilchenbahn eines Protons hat, welches diesen Kondensator durchläuft. Dies ist in Bezug auf die Untersuchung von permanenten elektrischen Dipolmomenten wichtig, da diese sehr sensitiv auf Störungen reagieren.

Die Suche nach solchen Momenten wird im Forschungszentrum Jülich betrieben, wo auch der Speicherring „COSY“ steht, welcher genau dafür genutzt werden soll.

Im ersten Kapitel „Theorie“ behandle ich die physikalischen Grundlagen zu diesem Thema.

Im darauf folgenden Kapitel „Vorstellung eines Experimentes zur Suche nach permanenten elektrischen Dipolmomenten“ gehe ich genauer auf permanente elektrische Dipolmomente ein und stelle ein Beispiel vor, wie die Suche nach diesen Momenten versuchstechnisch ablaufen könnte.

In dem Kapitel „Berechnung des elektrischen Feldes eines Plattenkondensators“ stelle ich die Methode vor, mit der das elektrische Feld des Plattenkondensators numerisch berechnet wurde.

Das nachfolgende Kapitel „Das Runge-Kutta-Verfahren“ befasst sich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren, welches zur numerischen Berechnung der Bewegungsgleichungen für die Teilchenbahn und den Spinverlauf verwendet wurde.

Im abschließenden Kapitel „Untersuchung der Teilchenlaufbahn und des Spins“ untersuche ich die Numerik des berechneten elektrischen Feldes. Des Weiteren betrachte ich das Randfeld des Kondensators und untersuche, inwieweit es die Effekte der Spindrehung beeinflusst.

2 Theorie

2.1 Beschleunigerphysik

Ein Teilchenbeschleuniger ist eine Vorrichtung, mit der man geladene Teilchen auf bestimmte Bahnen lenken kann und diese dort beschleunigt. Dabei ist die Beschleunigung durch die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

gegeben. Es gibt verschiedene Arten von Beschleunigern, hier wird speziell auf das Synchrotron und damit verbunden den Speicherring eingegangen.

2.1.1 Synchrotron

Das Synchrotron ist ein Teilchenbeschleuniger, in dem die geladenen Teilchen auf einer Kreisbahn gehalten werden und so durch Beschleunigung bei jedem Durchlauf auf sehr hohe kinetische Energien gebracht werden können. Dabei wird die Teilchenbahn durch ein magnetisches Feld bestimmt, welches mit der Teilchenenergie zunimmt. Es herrscht ein Gleichgewicht zwischen Zentripetalkraft und Lorentzkraft:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB, \quad (2)$$

wobei R der Radius des Synchrotrons ist und v die Teilchengeschwindigkeit. Die Beschleunigung der Teilchen erfolgt durch ein hochfrequentes elektrisches Wechselfeld, welches an die Ringfrequenz angepasst ist. Um Stöße mit Gasteilchen oder ähnlichem zu vermeiden, befindet sich der Strahl in einer Röhre, in der ein Ultrahochvakuum herrscht.

2.1.2 Speicherring

Der Speicherring ist eine besondere Form des Synchrotrons, welche auf das Speichern von Teilchen bei bestimmten Energien spezialisiert ist. Dabei ist er so aufgebaut wie ein Synchrotron, mit dem Unterschied, dass er die Teilchen nicht immer höher beschleunigt, sondern auf der Energie hält, mit der sie aus dem Vorbeschleuniger eingespeist wurden.

Dadurch, dass die Teilchenpakete teils viele Stunden in dem Speicherring bleiben, müssen die Verluste der Energie ausgeglichen werden und mögliche Quellen des Energieverlusts vermieden werden.

Aus diesem Grund sind an die Vakuumqualität besondere Anforderungen gestellt, da die Stöße mit Restteilchen auf Dauer die Energie des Strahles senken. Auch der Verlust von Energie durch Synchrotronstrahlung, also die Strahlung, die von geladenen relativistischen Teilchen abgegeben wird, wenn diese durch ein Magnetfeld abgelenkt werden, muss ausgeglichen werden. Dies wird auf den Beschleunigerstrecken realisiert.

2.2 Wienfilter

Ein Wienfilter ist ein Geschwindigkeitsfilter, welcher nur geladene Teilchen einer bestimmten Geschwindigkeit ohne Ablenkung passieren lässt. Dabei basiert die Funktionsweise auf dem homogenen elektrischen Feld eines Plattenkondensators, welches senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld steht.

Die Ablenkung der geladenen Teilchen ist in dieser Anordnung durch die elektrische Kraft $F_{el} = qE$ und die Lorentzkraft $F_L = qvB$ gegeben mit der elektrischen Feldstärke E und der magnetischen Flussdichte B . Der Durchlauf durch den Aufbau ohne Ablenkung erfolgt bei einem Gleichgewicht dieser beiden Kräfte.

Für die Geschwindigkeit kann man durch einfache Umformungen die Bedingung

$$v = \frac{E}{B} \quad (3)$$

ausrechnen.

2.3 Spin-Dynamik

Schickt man ein Teilchen, welches einen Spin \vec{S} besitzt, durch ein magnetisches Feld, so wirkt ein Drehmoment

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \mu\vec{S} \times \vec{B}^* \quad (4)$$

auf den Spin. Aus dieser Bewegungsgleichung folgt eine Präzession mit der Frequenz $f_{\text{Präzession}} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot B$.

In einem Beschleuniger rotiert der Spin $\nu_s = \gamma G$ mal während eines Kreisdurchlaufs. Diese Zahl wird Spin-Tune genannt. Dabei ist $G = \frac{g-2}{2}$ die sogenannte gyromagnetische Anomalie, welche aus dem gyromagnetischen Faktor g berechnet wird. Dieser ist unterschiedlich für verschiedene Teilchen und speziell für das Proton $g_P = 5.6$. Bei der Injektion des Teilchenpakets sind alle Spins in dieselbe Richtung horizontal ausgerichtet. Dadurch, dass die verschiedenen Teilchen unterschiedliche Geschwindigkeiten haben, dreht sich der Spin nach einigen Durchläufen der Teilchen in unterschiedliche Richtungen. Daraus folgt, dass die horizontale Polarisierung verschwindet. Da aber nur gemessen werden kann, wenn die Polarisierung besteht, muss man die Zeit der Polarisierung möglichst lang aufrecht erhalten. Diese Zeit wird Spin Kohärenzzeit genannt.

3 Vorstellung eines Experimentes zur Suche nach permanenten elektrischen Dipolmomenten

3.1 Einleitung

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen wurden aus [3] übernommen.

Die Suche nach permanenten elektrischen Dipolmomenten(EDM) ist in vielerlei Hinsicht interessant für die moderne Physik. Die Entdeckung solcher Momente würde neue Grundlagen zum Verständnis des Ursprungs des Universums legen. In der modernen Astrophysik besteht bis heute ein nicht geklärtes Ungleichgewicht zwischen Materie und Antimaterie. Die Theorie, die die dynamische Entstehung dieses Ungleichgewichts erklärt, heißt Baryogenese. Im Jahr 1967

formulierte Andrei Sacharow 3 Bedingungen für diesen Prozess:

1. Am Anfang der Entwicklung des Universums muss die Baryonenzahl verletzt worden sein,
2. Die C- und CP-Erhaltung müssen verletzt worden sein,
3. Eine Verletzung des thermischen Gleichgewichts in dem Moment, in dem die Baryonenzahl „generiert“ wurde.

Eine CP-Verletzung wurde im Jahr 1964 erstmals in dem Zerfall neutraler Kaonen festgestellt und ist auch in den Zerfällen von B-Mesonen und charmed Mesonen zu finden. Diese Verletzung wurde mittels einer Matrix bereits in das Standardmodell integriert. Die CP- und P-Verletzung, also die Verletzung der Ladung und des Vorzeichens, führen zu permanenten elektrischen Dipolmomenten in Teilchen, die sowohl P- als auch T-verletzend sind.

Obwohl das Standardmodell in vielen Gebieten gute Vorhersagen macht, sagt es für das elektrische Dipolmoment von Nucleonen einen sehr kleinen Wert voraus, der zwischen 10^{-33} und $10^{-31} e\cdot\text{cm}$ liegt, wobei die obere Grenze für ein Neutron im Moment bei $2.9 \cdot 10^{-26} e\cdot\text{cm}$ liegt. Dieses kleine Dipolmoment liegt unterhalb der Reichweite, die man auch in zukünftigen Experimenten erreichen kann. Eine Erweiterung des Standardmodells ist die Supersymmetrie, die für das elektrische Dipolmoment des Neutrons eine Spanne von $10^{-29} < d_n < 10^{-24} e\cdot\text{cm}$ vorhersagt. Diese Größenordnung liegt genau in dem Bereich, der zukünftig auf der Suche nach elektrischen Dipolmomenten untersucht wird.

Die Ausrichtung des EDM ist dabei immer parallel zu der des Teilchenspins, $\vec{d} \parallel \vec{S}$, da der Spin die einzig ausgezeichnete Richtung eines Momentes für ein Teilchen darstellt.

In der theoretischen Physik besteht eine Einigkeit, dass das Messen eines EDM von Proton, Deuteron und Helion genauso wichtig ist, wie das Messen des EDM des Neutrons. Allerdings sind für die EDM von Proton und Deuteron bisher keine direkten oberen Grenzen vorhanden, da es bei geladenen Teilchen schwierig ist eine Grenze zu bestimmen.

Bei der Existenz von permanenten EDM modifizieren diese in einem elektrischen Feld die Präzession des Spins, da der Spin parallel zum elektrischen Dipolmoment steht, $\vec{S} \parallel \vec{d}$, wobei dieser der Differentialgleichung

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \mu\vec{S} \times \vec{B}^* + \vec{d} \times \vec{E}^* \quad (5)$$

mit $\vec{E}^* = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B})$ und $\vec{B}^* = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E})$ folgt. Dabei kann das EDM von geladenen Teilchen nur in Speicherringen angenähert werden.

Die Suche nach EDM von geladenen Teilchen war bisher nicht möglich, da

solche elektrostatischen Speicherringe in dieser Form noch nicht existieren. Die Idee, mit der man in solchen Speicherringen das EDM von beispielsweise Protonen messen kann, besteht darin, Protonen mit longitudinaler Polarisation in einem reinen elektrostatischen Ring zu speichern. Das EDM führt dann in der Theorie zu einer Präzession um das radiale elektrische Feld und erzeugt einen Aufbau der transversalen Polarisation, die durch Polarimetrie gemessen werden kann.

Bevor solche Speicherringe jedoch gebaut werden, müssen an bereits bestehenden Ringen Vorläuferexperimente gemacht werden, die die technischen Probleme austesten. Ein Experiment, das man am COSY Speicherring in Jülich mit kleineren Modifikationen durchführen könnte, wird später besprochen. In einem magnetischen Speicherring wie COSY ist die stabile Polarisationsachse normal zu der Ringebene. Daraus folgt die vielversprechende Idee eines radiofrequentierten elektrischen Feldes, welches als Spin-Flipper dient. Dieses würde den Spin in die Ringebene rotieren. Die daraus resultierende T und P nicht invariante Polarisation in der Ebene, welche durch das EDM hervorgerufen wird, kann durch eine oben-unten Asymmetrie bei der Streuung von gespeicherten Teilchen auf dem Polarimeter gemessen werden. Solange keine Effekte wie zum Beispiel falsche Spin Rotationen durch das magnetische Moment auftreten, könnte man theoretisch auf eine Obergrenze für das Deuteron von $d_d < 10^{-24} e\text{-cm}$ hinarbeiten. Diese wäre ähnlich wertvoll, wie die bereits existierende Obergrenze für das Neutron.

3.2 Grundlagen der Suche nach EDM

Die Grundlagen, um elektrische Dipolmomente in Protonen, Deuteronen und ^3He -Kernen nachzuweisen, bestehen darin, radiale elektrische und magnetische Felder innerhalb des Rings anzulegen, um das Teilchen darin zu steuern. Mithilfe von elektrischen Quadrupolmagneten wird der Teilchenstrahl fokussiert und durch interne Polarimeter wird die Ausrichtung des Spins in Abhängigkeit der Zeit gemessen. Ein radiofrequentierter Resonator und Sextupolmagneten werden benutzt, um die Spinkohärenzzeit des Strahls zu verlängern. Für Protonen bedeutet dies, dass man einen Speicherring mit einem sehr einheitlichen radialen elektrischem Feld baut, welches ungefähr eine Stärke von 17MV/m hat zwischen zwei Stahlplatten, die sich im Abstand von 2cm befinden. Der Radius, in dem diese Platten gebogen sind, beträgt in etwa 25m, wobei er sich zu 30m ändert, wenn man auch die geraden Strecken berücksichtigt, die ein solcher Speicherring haben würde. Der sogenannte magnetische Impuls von 0.7GeV/c ist derjenige, bei dem die $(g-2)$ Präzessionsfrequenz bei Null liegt.

3.3 Der radiofrequentierte elektrische Flipper

Eine vielversprechende Methode zum Nachweis des EDM ist der radiofrequentierte elektrische Flipper, welcher mit einer Frequenz läuft, die sich an der des Spin-Tune $G\gamma$ orientiert. Er funktioniert dabei wie ein elektrisches Wechselfeld. In einem Speicherring wie COSY besteht die Idee, diesen um einen solchen Flipper zu ergänzen.

3.3.1 Funktionsweise

Der Flipper wird an einer Stelle hinzugefügt, an der das magnetische Feld Null ist. Ein permanentes elektrisches Dipolmoment, $\vec{d} = ed\vec{S}$ erhöht die Präzession des Spins \vec{S} in einem elektrischen Feld \vec{E} mit $\omega_{EDM} = edE$. Ein einzelner Durchlauf durch diesen Flipper der Länge L mit einem radialen elektrischen Feld \vec{E} würde den Anfangsspin, welcher vertikal ausgerichtet ist, drehen: $\vec{S} \parallel S_y$ und eine longitudinale Komponente erzeugen $S_z = S_y \cdot \alpha$ mit $\alpha = \frac{dEL}{\beta c}$. Für einen Deuteronenstrahl der Energie $T = 100\text{MeV}$, einen Flipper der Länge $L = 1\text{m}$, einem elektrischen Feld der Feldstärke $E = 15\text{kV/cm}$ und $d = 10^{-23}\text{cm}$ ergibt sich $\alpha = 2.4 \cdot 10^{-12}$, was die Komplexität dieser Aufgabe deutlich macht.

3.3.2 Aufbau des EDM-Signals

Die longitudinale Komponente des Spins würde in dem magnetischen Feld unter Berücksichtigung des Impulses mit der Frequenz $f_S = \gamma G f_R$ präzidieren mit einem Winkel von $\theta_S = 2\pi\gamma G$ pro Durchlauf, wobei G das anomale magnetische Moment und f_R die Ringfrequenz bezeichnen. Die minimalen EDM Spin Rotationen, welche gesucht sind, stören diese Präzession nicht. Verglichen mit dem Umfang des gesamten Speicherrings kann der Flipper als punktförmig angenommen werden. Betrachtet man das winzige α , so ist die Änderung der Größenordnung der Polarisation in der Ebene, $S_{\parallel} = (S_x^2 + S_z^2)^{\frac{1}{2}}$, pro Durchlauf gut genähert durch $S_{\parallel}(i+1) = S_{\parallel}(i) + S_y\alpha \cos(\theta)(i)$. Summiert man über k Durchläufe, so erhält man

$$S_{\parallel} = S_y \sum_{l=1}^k \alpha \cos(l\theta_S), \quad (6)$$

welches für ein statisches elektrisches Feld mit konstantem α nur um einen konstanten Wert oszilliert, wie in Abbildung 1 zu sehen. Dabei wurde die Oszillation für 100 Umläufe aufgezeichnet.

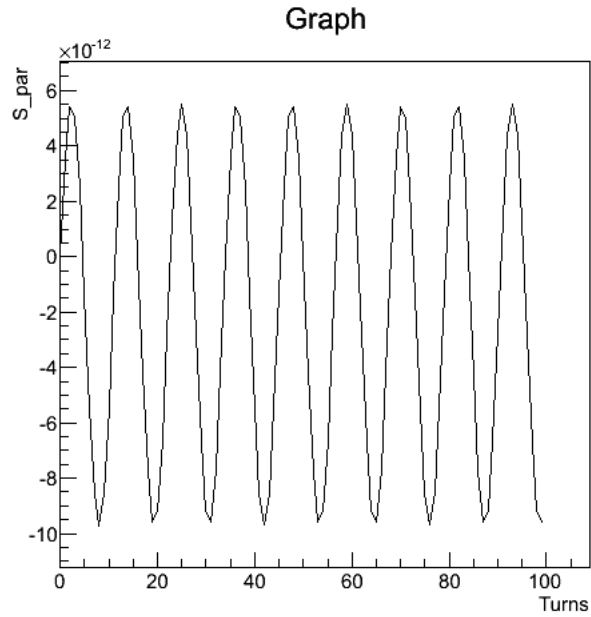


Abbildung 1: Oszillation des Spins in der Ringebene

Um die Komponente in der Ringebene aufzubauen, muss also das elektrische Feld des Flippers so moduliert werden, dass es mit der Präzession des Spins gleichförmig wechselt: $E = E_0 \cos(l\theta_F) = E_0 \cos(\theta_F f_R t)$. In Abhängigkeit von der Zeit ändert sich der Auslenkwinkel zu $\alpha = \alpha_E \cos(\theta_F f_R t)$. Diese Änderungen führen zu der Gleichung

$$S_{\parallel} = S_y \sum_{l=1}^k \alpha_E \cos(l\theta_S) \cos(l\theta_F) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^k [\cos(l(\theta_S - \theta_F)) + \cos(l(\theta_S + \theta_F))], \quad (7)$$

an der man gut erkennen kann, dass nur die Resonanzbedingung $\theta_F = \pm\theta_S$ zu einem Aufbau des EDM-Signals führt.

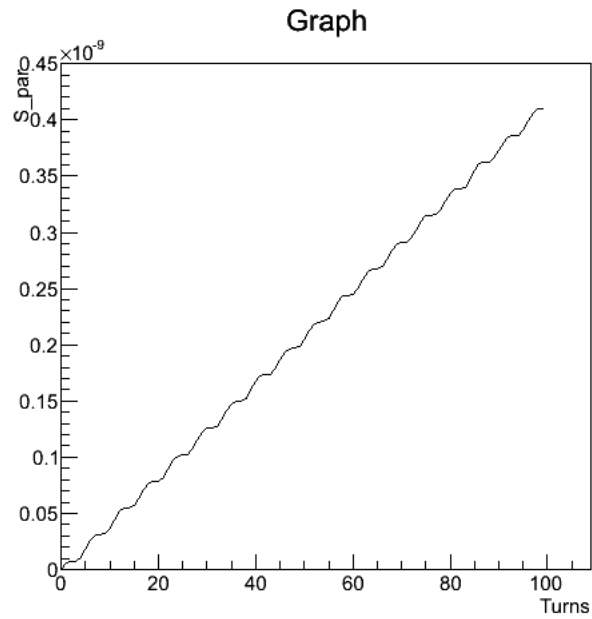


Abbildung 2: Aufbau der Spinkomponente in der Ringebene bei perfekter Resonanz

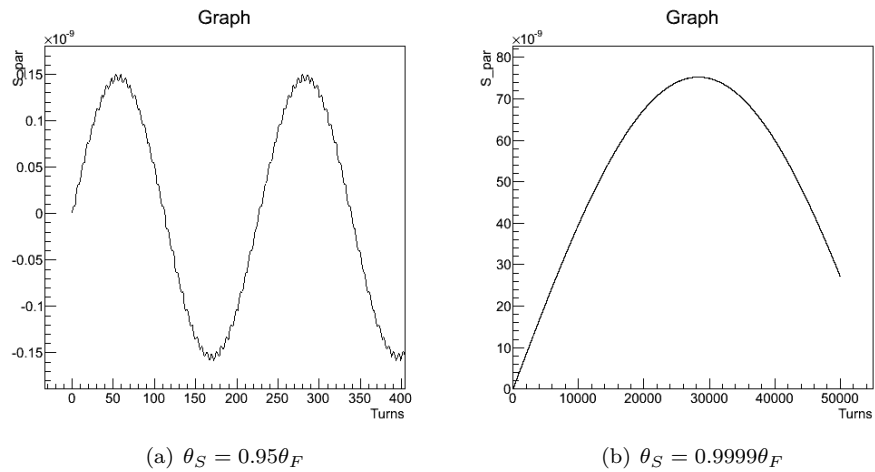


Abbildung 3: Aufbau der Spinkomponente in der Ringebene ohne Resonanzbedingung

Für Durchläufe mit perfekter Resonanz ist der Aufbau in Abbildung 2 zu sehen,

mit der Bedingung $\theta_S = 0.95\theta_F$ und der Bedingung $\theta_S = 0.9999\theta_F$ in Abbildung 3. Man sieht deutlich, dass sich das Signal auch bei kleiner Abweichung von der perfekten Resonanz zwar aufbaut, jedoch nach einer gewissen Zeit auch wieder abbaut, wodurch es nicht gut messbar wird. Allerdings ist der Aufbau des Signals mit nahezu perfekter Resonanz über ca. 30000 Umläufe positiv, bevor sich das Signal wieder abbaut. Dies führt dazu, dass man in beschränkten Zeiten auch ein Signal ohne die Resonanzbedingung aufbauen kann.

3.3.3 Korrektur der Spin-Tune Frequenz

Ist ein radiofrequentierter elektrischer Flipper mit einem oszillierenden elektrischen Feld in einem Speicherring vorhanden, so beeinflusst er sowohl die Bahn des Teilchens, als auch den Spin-Tune. Als Erstes generiert der Flipper einen oszillierenden radialen Impuls, welcher bei jedem i -ten Durchlauf den Wert $\Delta p_r = eE_0 L \cos(G\gamma f_R t_i) / \beta c$ annimmt. Dieser Impuls oszilliert nicht gleich mit der Ring-Frequenz und der Betatron-Frequenz. Für den bisher vorgestellten Flipper und einer Teilchenenergie von 100 MeV für Deuteronen ist der Drehwinkel ungefähr $\pm 2 \cdot 10^{-3}$, welches in einem gut detektierbaren Bereich liegt. Als zweites braucht die Spin Präzession mit Berücksichtigung der Impulsrotation eine oszillierende Korrektur

$$\vec{\omega} = -\frac{e}{m} \cdot \left[G\vec{B} - \left(G - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \vec{\beta} \times \vec{E} \right] \quad (8)$$

zu $G\gamma$ ähnlich, wie beim komplett magnetischen Ring, bei dem der elektrische Term die Änderungen von der Spin Präzession und der Zyklotron Frequenz zusammenfasst. Als Endergebnis steht eine Frequenzmodulation des Spin-Tune, $G\gamma \rightarrow G\gamma[1 - y_F \cos(l\theta_S)]$, wobei y_F für Energien im für die Untersuchung von EDM interessanten Bereich klein ist. Die neue, modifizierte Endgleichung enthält nun eine zeitunabhängige, schwache Reduzierung für den Zuwachs der Spin-Komponente in der Ebene:

$$\begin{aligned} S_{\parallel} &= S_y \sum_{l=1}^k \alpha_E \cos(l\theta_S) \cos(l\theta_S [1 - y_F \cos(l\theta_S)]) \\ &= S_y \sum_{l=1}^k \alpha_E \cos^2(l\theta_S) \left[1 - \frac{1}{2} y_F^2 \cos^2(l\theta_S) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

In Abbildung 4 ist dieser Prozess in der abgeschwächten Form dargestellt, man kann jedoch immer noch den deutlichen Zuwachs pro Umlauf erkennen. Die Korrektur für den Spin-Tune ist bei einem praktischen Durchlauf nur für lange Laufzeiten interessant und beeinflusst die bisher dargestellten Gedankengänge nicht.

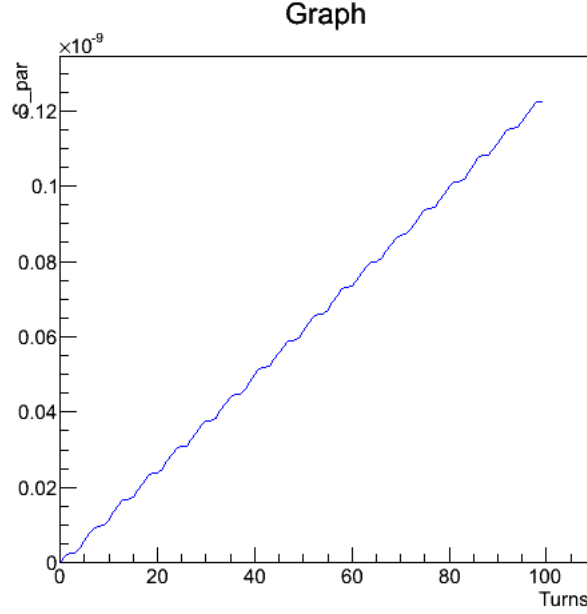


Abbildung 4: Aufbau der Spinkomponente in der Ringebene mit modulierter Frequenz

3.3.4 Korrektur für Teilchenpakete

Jedes Teilchen, das zum ersten Mal in den Flipper eintritt, hat eine Anfangs y-Komponente des Spins $\vec{S}_y(0)$ und eine Anfangskomponente in der Ringebene $\vec{S}_{xz}(0)$. Nach k Durchläufen kann der komplette Polarisationsvektor aufgespalten werden in die Anfangs y-Komponente, die mit der Spinrotationsmatrix um die y-Achse modifizierten Anfangskomponente in der Ringebene und der Polarisation in der Ringebene, welche durch den Flipper erzeugt wurde: $\vec{S}(t) = \vec{S}_y(0) + \hat{R}_y(k)\vec{S}_{xz}(0) + \vec{S}_{\parallel}(t)$.

Für ein Teilchenpaket endlicher Länge ändert sich für die später einlaufenden Teilchen das elektrische Feld des Flippers. Die bisherigen Herleitungen beziehen sich auf ein Teilchen, welches bei $t = 0$ in das oszillierende elektrische Feld eintritt. Teilchen, die um einen Anteil $0 < z < 1$ des Ringumfangs hinter dem Anfangsteilchen herfliegen, erfahren also ein anderes elektrisches Feld, welches um die Zeit $\Delta t = z/f_R$ versetzt ist. Daraus folgt für die durch den Spin-Flipper erzeugte Polarisation in der Ringebene

$$S_{\parallel}(z) = S_y \alpha_E \sum_{l=1}^k \cos(l\theta_S) \cos(l\theta_S + z\theta_S). \quad (10)$$

Ein Teilchenpaket kann als punktförmig angenommen werden, wenn $z_i \theta_S \ll 1$

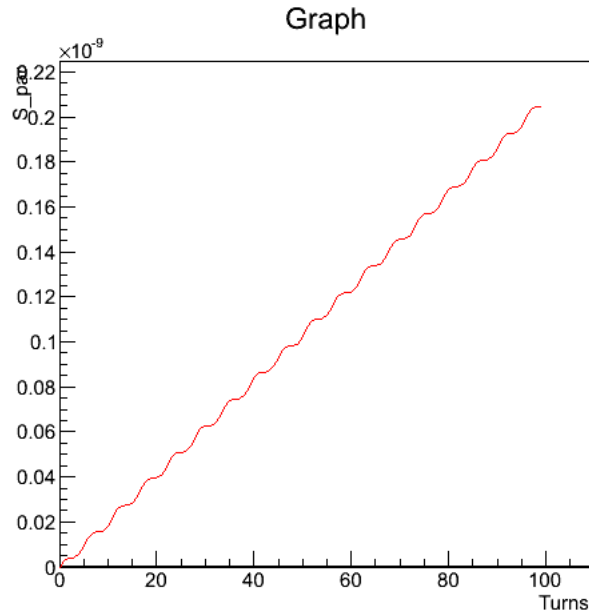


Abbildung 5: Aufbau der Spinkomponente in der Ringebene eines Teilchenpaketes

gilt, da dieser Term dann vernachlässigt werden kann, wobei z_b die Länge des Pakets ist. Für $z = 0.05$ ist die Polarisation in Abhängigkeit der Umläufe in der Abbildung 5 zu sehen.

Die longitudinale und radiale Komponente S_z und S_x würden anfangen zu oszillieren, wie in Abbildung 6 zu sehen, wobei $S_z = S_{\parallel}(k)\cos(\theta_S k)$ in blau dargestellt ist und $S_x = S_{\parallel}(k)\sin(\theta_S k)$ in rot. Man kann leicht $S_{\parallel}(t)$ von der relevanten Fourier-Komponente der Asymmetrie extrahieren, wobei die Messung der longitudinalen und radialen Komponente eine wichtige Gegenprobe ist. Allerdings muss man festhalten, dass radiale magnetische Felder in Richtung der Ringebene zu vermeiden sind, da das magnetische Moment eine falsche Präzession bei der zur Ringebene vertikalen Komponente des Spins hervorruft. Dies scheint eine S_z Polarimetrie bei einem anfangs longitudinal polarisierten Teilchen, welches von einem longitudinalen magnetischen Feld beeinflusst wird, auszuschließen.

Die Nutzung von anfangs transversal polarisierten Teilchen scheint jedoch zu funktionieren, obwohl hier die Injektion von vielen leicht verschiedenen Zuständen der polarisierten Quelle notwendig ist.

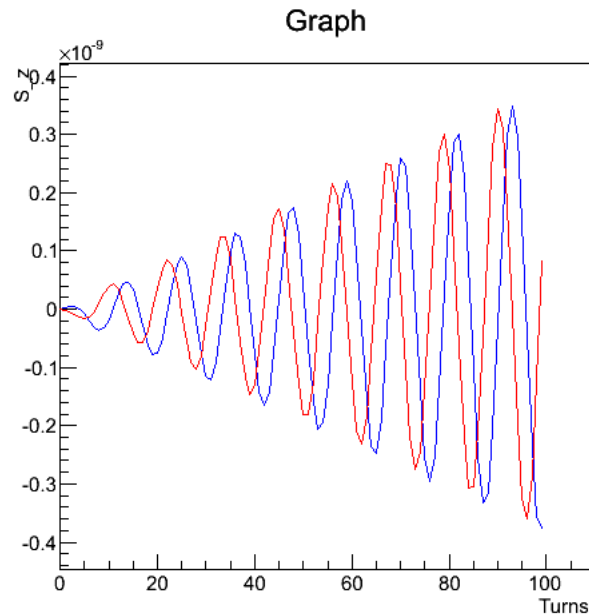


Abbildung 6: Oszillation der Spinkomponenten

3.3.5 Nullexperiment

In einem Nullexperiment, in dem man das radiale elektrische Feld des Flippers mit einem vertikalen magnetischen Feld ergänzt, welche in Phase läuft, sieht man, dass das elektrische Feld des Flippers genau durch das induzierte durch $|\vec{E}| = |\vec{r} \times \vec{B}|$ elektrische Feld aufgehoben wird: $\vec{E}^* = 0$. Dadurch kann man das wahre elektrische Dipolmoment von Randeffekten trennen. Auf der anderen Seite erzeugt ein induziertes magnetisches Feld, welches oszilliert, nur eine schwache Frequenzmodulation des Spin-Tune, daher ist die Festlegung von $\vec{B}^* \neq 0$ erwünscht.

3.4 Schlussfolgerung

Bisher wurden verschiedene Überlegungen zu einem Solteilchen diskutiert, die von einem perfekt homogenem elektrischen und magnetischen Feld ausgehen. Im Folgenden werden die Überlegungen zu Randfeldeffekten bei einem nicht perfekten elektrischen Feld angestellt. Diese könnten bei einer hohen Anzahl an Durchläufen eine Messung selbst bei kleinen Störungen unbrauchbar machen.

4 Berechnung des elektrischen Feldes eines Plattenkondensators

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen wurden mit Hilfe von [1] erarbeitet.

Da die analytische Berechnung des elektrischen Feldes eines Plattenkondensators in 2 Dimensionen sehr schwierig und in 3 Dimensionen unmöglich ist, wurde eine andere Art der Berechnung gewählt. Diese numerische Methode basiert auf einem iterativen Verfahren und nennt sich „Finite-Elemente-Methode“ (FEM). Zur Veranschaulichung der Funktionsweise wird das Problem zuerst in 2 Raumdimensionen ausgeführt.

Die FEM dient zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen. Dazu wird zunächst die Ebene, in der in diesem Fall der Plattenkondensator liegt, in ein Gitter gelegt. Um nun die Poisson-Gleichung $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ zu lösen, wird die zweifache Ableitung durch den Laplace-Operator durch den quadratischen Differenzenquotienten

$$f''(x) \approx \frac{(f(x+h) - f(x))^2}{h^2} \quad (11)$$

genähert. Das h ist dabei der Abstand zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten. Nun wird auf die Platten des Kondensators eine Ladungsträgerdichte ρ gelegt, die auf den verschiedenen Platten jeweils unterschiedliche Vorzeichen hat. Für die Berechnung des Potentials um den Kondensator wird für jeden Gitterpunkt der quadratische Differenzenquotient mithilfe der umliegenden vier Gitterpunkte gebildet. Dabei ist zu beachten, dass für jeden Punkt einzeln der Differenzenquotient berechnet wird und anschließend die Werte, die man erhält, gemittelt werden. Es wird das komplette Gitter mit dieser Näherung durchlaufen, wobei die Randpunkte nur die angrenzenden Punkte innerhalb des vordefinierten Gitters betrachten.

Da die Berechnung logischerweise bei dem ersten Durchlauf nicht das Potential im kompletten Gitter darstellen kann, wird das Ergebnis benutzt, um im zweiten Durchlauf wieder mithilfe des quadratischen Differenzenquotienten überarbeitet zu werden. Dieser Vorgang wird beliebig oft wiederholt, allerdings ändert sich bei vielen Iterationen das Potential immer weniger, sodass es eine natürliche Grenze gibt, ab der weitere Iterationen kaum noch ins Gewicht fallen.

Um aus dem errechneten Potential das elektrische Feld zu erhalten, betrachtet man die Gleichung $\vec{E} = -\nabla\phi$. Es ist sofort sichtbar, dass auch hier die Ableitung durch den Differenzenquotienten genähert werden kann. Das Gitter wird deshalb erneut durchlaufen, wobei diesmal der einfache Differenzenquotient $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ benutzt wird. Zur Betrachtung des einzelnen

Gitterpunktes werden wieder die umliegenden Werte für die Berechnung des Differenzenquotienten benutzt. Iterative Durchgänge sind hier jedoch nicht nötig, da das Potential bereits vollständig berechnet wurde und nur noch die Ableitung für das elektrische Feld gebraucht wird, was bereits bei einfacher Anwendung funktioniert. Zu beachten ist bei diesem Vorgang noch, dass es sich um ein Vektorfeld handelt und das elektrische Feld somit eine x- und y-Komponente besitzt, in drei Dimensionen auch noch eine z-Komponente. Daraus folgt logischerweise, dass man für die einzelnen Komponenten auch die partiellen Ableitungen bilden muss. Realisiert wird dies dadurch, dass man bei der x-Komponente für den Differenzenquotienten nur die Punkte in x-Richtung betrachtet.

Nachdem diese Methode zur numerischen Berechnung von elektrischen Feldern über zwei Dimensionen verstanden wurde, lieferte auch die Übertragung in drei Dimensionen gute Ergebnisse.

5 Das Runge-Kutta-Verfahren

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen wurden mit Hilfe von [2] erarbeitet.

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren dient zur Berechnung von partiellen Differentialgleichungen der Form $y' = f(x, y)$ mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$. Ist die exakte Lösung der DGL nicht ermittelbar, so wird sie mithilfe dieses Verfahrens für bestimmte Schrittweiten h genähert. Dabei kann ausgehend von dem ersten berechneten Punkt der nächste bei der um h fortgesetzten Position errechnet werden, bis man das gewünschte Ergebnis erreicht hat und dort die Berechnung abbrechen kann.

Als Grundlage benutzt das Runge Kutta Verfahren die verschiedenen Steigungen an bestimmten Punkten im Intervall h . Aus diesen Steigungen ergibt sich gemittelt ein Wert Δy , der von einem Punkt ausgehend den um das Intervall h zeitlich verschobenen Punkt angibt: $y(x_0 + h) = y_0 + \Delta y$.

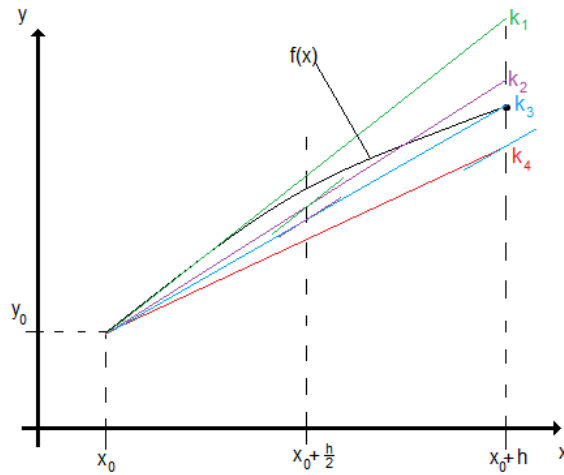


Abbildung 7: Skizze zur Veranschaulichung der Schritte des Runge-Kutta-Verfahrens

Die Berechnung von Δy lässt sich dabei in vier grundlegende Schritte aufteilen:

Im ersten Schritt wird die Steigung am Intervallanfang betrachtet. Dazu wird ein k_1 definiert, welches sich aus der Funktion $f(x, y)$ errechnet. Um die Steigung zu berechnen, werden zunächst die Anfangswerte eingesetzt und daraufhin die Funktion mit der Intervallbreite multipliziert

$$k_1 = f(x_0, y_0) \cdot h. \quad (12)$$

Der zweite Schritt gibt nun die Steigung in der Intervallmitte an. Das k_2 wird dabei bei der Position berechnet, die um $h/2$ nach vorne verschoben ist, und bei dem y , welches um $k_1/2$ verschoben ist. Daraus ergibt sich

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \cdot h. \quad (13)$$

Bei der Berechnung von k_3 betrachtet man wieder die Steigung in der Intervallmitte, allerdings ist diese hier im y -Bereich um $k_2/2$ verschoben. Es folgt

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) \cdot h. \quad (14)$$

In der Berechnung von k_4 ist nun die Steigung am Intervallende wichtig. Deshalb wird die Position um die ganze Intervallbreite h verschoben und der y -Bereich um das vorher berechnete k_3 . Also gilt

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3) \cdot h. \quad (15)$$

Diese Steigungen werden gewichtet gemittelt, wodurch insgesamt gilt:

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (16)$$

Hat man den ersten Punkt in der Lösungskurve berechnet, so kann man mit diesen Werten den nächsten Punkt ausrechnen. Dies führt zu einer numerische Lösung der Differentialgleichung, die auch für analytisch nicht lösbare Probleme benutzt werden kann.

Es gibt auch andere Methoden zur numerischen Berechnung von partiellen Differentialgleichungen, allerdings hat das klassische Runge-Kutta-Verfahren mit einem Fehler der Ordnung h^5 eine sehr viel größere Genauigkeit als beispielsweise das Euler-Verfahren erster Ordnung ($\propto h$).

6 Untersuchung der Teilchenlaufbahn und des Spins

6.1 Einleitung

Da die Suche nach elektrischen Dipolmomenten sehr sensitiv auf jegliche Störungen reagiert, müssen auch Aspekte betrachtet werden, die sonst kaum ins Gewicht fallen.

Durchläuft ein Teilchen ein elektrisches Feld, so nimmt es auch Effekte des Randfeldes mit, die unter Umständen die Messung beeinflussen können. Des Weiteren kann man davon ausgehen, dass bei den verschiedenen Durchläufen durch das elektrische Feld die einzelnen Teilchen nicht perfekt durch die Mitte des Feldes fliegen, sondern auch abweichend in einem kleinen Bereich um den Mittelpunkt eintreten. Dadurch ergeben sich auch andere Messergebnisse.

6.2 Mathematische Vorbereitungen

Um diese verschiedenen Effekte zu prüfen, wurde das Feld zur Vereinfachung als das eines Plattenkondensators angenommen, welcher quadratische Platten mit 20cm Seitenrand hat. Die Platten befinden sich in einem Abstand von 20cm. Das elektrische Feld wurde nun mit der zuvor beschriebenen Methode der finiten Elemente numerisch bestimmt. Ein Schnitt in die x-y-Ebene für das Potential ist in Abbildung 8 zu sehen. Die Linien, die in der Mitte der Abbildung und am oberen und rechten Rand zu sehen sind, sind Artefakte, die jedoch die späteren Berechnungen nicht beeinflussen.

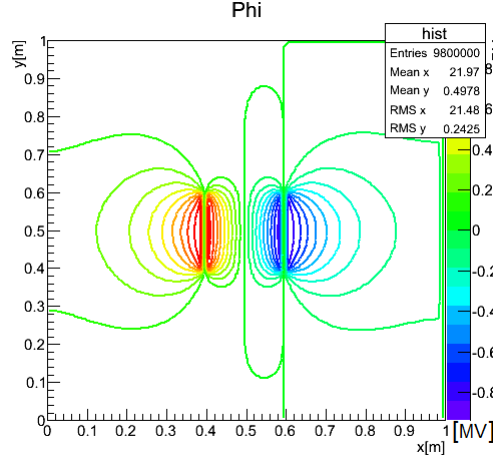


Abbildung 8: Numerisch berechnetes Potential des Kondensators

Betrachtet man die Kraft, die auf ein bewegtes geladenes Teilchen im elektrischen Feld wirkt $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ und setzt diese mit der Ableitung des relativistischen Impulses $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ nach der Zeit gleich, so erhält man durch einfache Umformungen die Gleichung

$$\dot{\vec{\beta}} = \frac{e}{mc\gamma} \cdot (\vec{E} + c\vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma\beta} \vec{\beta}. \quad (17)$$

Diese Gleichung kann man weiter vereinfachen, indem man annimmt, dass $\dot{\vec{p}} = e\vec{E}$ gilt. Multipliziert man beide Seiten mit \vec{p} und formt die Gleichung mithilfe von $\vec{p} \cdot \dot{\vec{p}} = \frac{1}{2}(\dot{p}^2)$ und $\frac{dp^2}{dt} = 2m^2c^2\gamma\dot{\gamma}$ weiter um, so kann man auflösen, dass gilt

$$\dot{\gamma} = \frac{e}{mc} \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{E}. \quad (18)$$

Dieses lässt sich in die zuvor berechnete Formel einsetzen und man erhält als Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im elektrischen Feld

$$\dot{\vec{\beta}} = \frac{e}{mc\gamma} \cdot (\vec{E} + c\vec{\beta} \times \vec{B} - \vec{\beta} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{E})). \quad (19)$$

Diese Gleichung wurde für das Tracking des Teilchens benutzt.

Für den Spin ist die Herleitung sehr viel komplizierter, weswegen sie aus [4] übernommen wurde:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{S} \times \left(\left(a + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} - \frac{a\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) - \left(a + \frac{1}{1+\gamma} \right) \vec{\beta} \times \frac{\vec{B}}{c} + \frac{\eta}{2} \left[\frac{\vec{E}}{c} + \vec{\beta} \times \vec{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{\vec{\beta}}{c} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \right] \right). \quad (20)$$

6.3 Ablenkung des Teilchens im elektrischen Feld

Um nun die Teilchenbahn und dabei den Verlauf des Spins verfolgen zu können, wurden mit Hilfe des Runge-Kutta Verfahrens die Differentialgleichungen für die Teilchenbahn und den Spin numerisch gelöst. Die Berechnungen wurden bei einer Teilchengeschwindigkeit von $v_y = 0.56 \cdot c$ durchgeführt, welche dem magnetischen Impuls des Protons entspricht. Da man bei dieser Geschwindigkeit mit dem bloßen Auge kaum eine Ablenkung erkennen kann, wurde diese in ROOT ausgegeben, welche der theoretischen Vorhersage von $\Delta x \approx 10^{-4}\text{m}$ entspricht. Die Teilchenbahn ist in Abbildung 9 zu sehen.

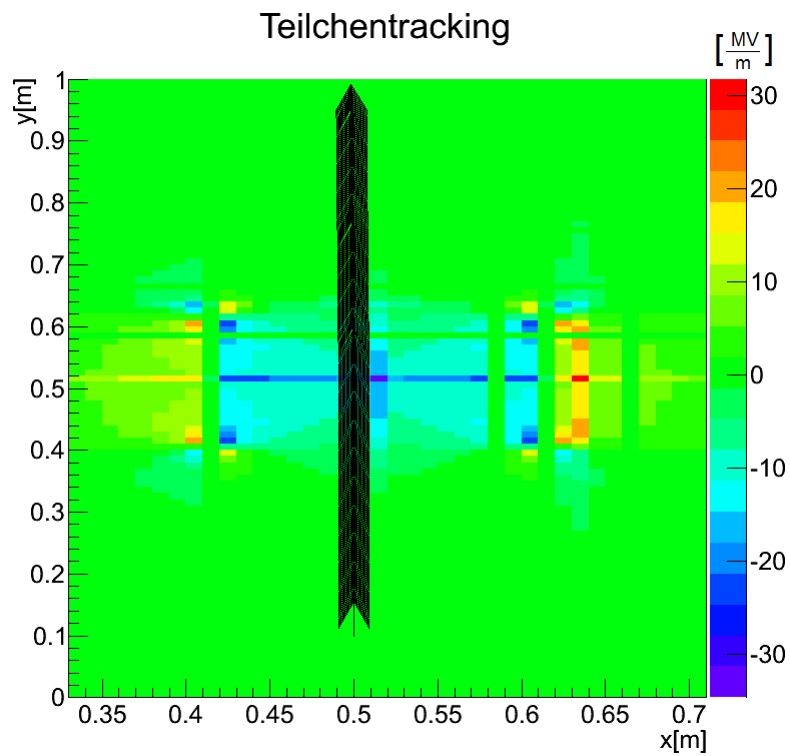


Abbildung 9: Teilchenbahn eines Protons durch ein elektrisches Feld

Die Teilchenbahn ist durch Pfeile gekennzeichnet. Der Kondensator, der in der Mitte der Abbildung liegt, erzeugt ein elektrisches Feld, dessen Feldstärke qualitativ durch die Farbskala am rechten Rand gegeben ist.

6.4 Teilchen und Spinbetrachtung mit Wienfilter

Da eine Ablenkung nicht erwünscht ist, wurde im Kondensator ein magnetisches Feld definiert, welches in positive z-Richtung zeigt. Dadurch, dass elektrisches und magnetisches Feld senkrecht aufeinanderstehen, entsteht ein Wienfilter. Durch diesen können nur Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit ohne Ablenkung hindurchfliegen. Dabei wird die Geschwindigkeit bestimmt durch die Feldstärke des magnetischen Feldes. Diese errechnet sich, da man die Geschwindigkeit bereits vorgegeben hat, zu

$$B_z = \frac{E_{max}}{c\beta_0}, \quad (21)$$

wobei E_{max} die maximale elektrische Feldstärke des Kondensators ist und β_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens in y-Richtung geteilt durch c . Die maximale elektrische Feldstärke wurde als $E_{max} = 9.4\text{MV/m}$ angenommen. Lässt man das Proton nun mit der gleichen Geschwindigkeit wie zuvor von $v_y = 0.56 \cdot c$ durch den Kondensator fliegen, so wird es nicht mehr abgelenkt, zu sehen in Abbildung 10. Dies wurde auch verifiziert, indem der Wert der Austrittsposition in ROOT ausgegeben wurde.

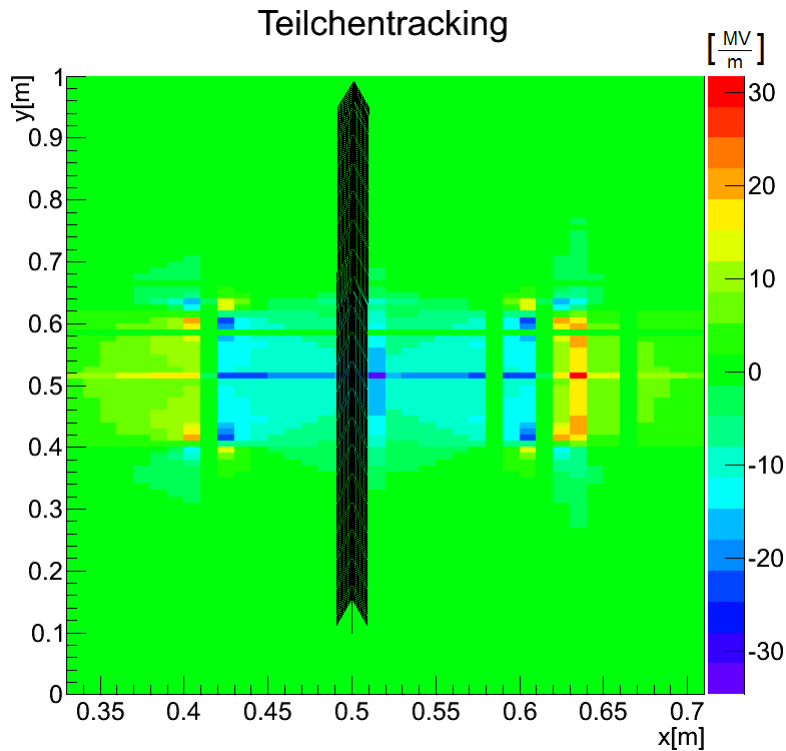


Abbildung 10: Teilchenbahn eines Protons durch einen Wienfilter

Da der Spin, welcher in positive y-Richtung orientiert ist, bei einem reinen elektrischen Feld für $\vec{a} = 0$ unverändert bleibt, wird die Betrachtung erst bei hinzugefügtem magnetischen Feld interessant. Der Spin wurde als $S_y = 0.5\hbar$ angenommen.

Bei den zuvor genannten Bedingungen kann man eine Abnahme der y-Komponente des Spins beim Durchlauf durch den Kondensator erkennen, während sich die x-Komponente in positive Richtung vergrößert. Zu sehen ist dies in Abbildung 11 und 12. Die Änderung der z-Komponente gibt Aufschluss über die Präzision der Methode, da sich S_z eigentlich nicht ändern sollte. Diese ist mit einer Größenordnung von 10^{-6} in einem Bereich, den man nicht vernachlässigen kann und wurde als Fehler auf die x- und y-Komponente des Spins angenommen. Allerdings ist der Verlauf der z-Komponente uninteressant für die nachfolgenden Überlegungen, weshalb er hier der Vollständigkeit halber in Abbildung 13 gezeigt ist. Nachfolgend wird nur noch die x- und y-Komponente betrachtet.

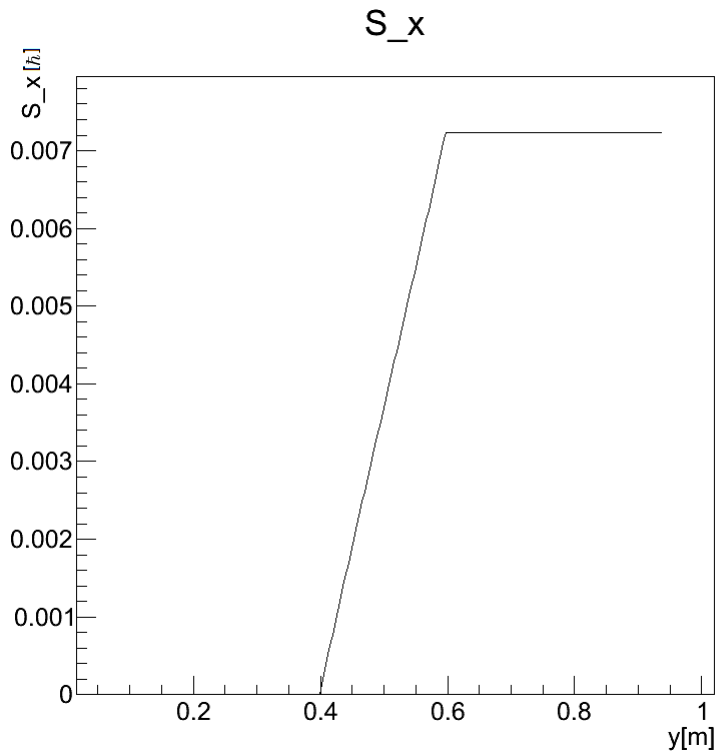


Abbildung 11: S_x beim Durchlaufen des Wienfilters

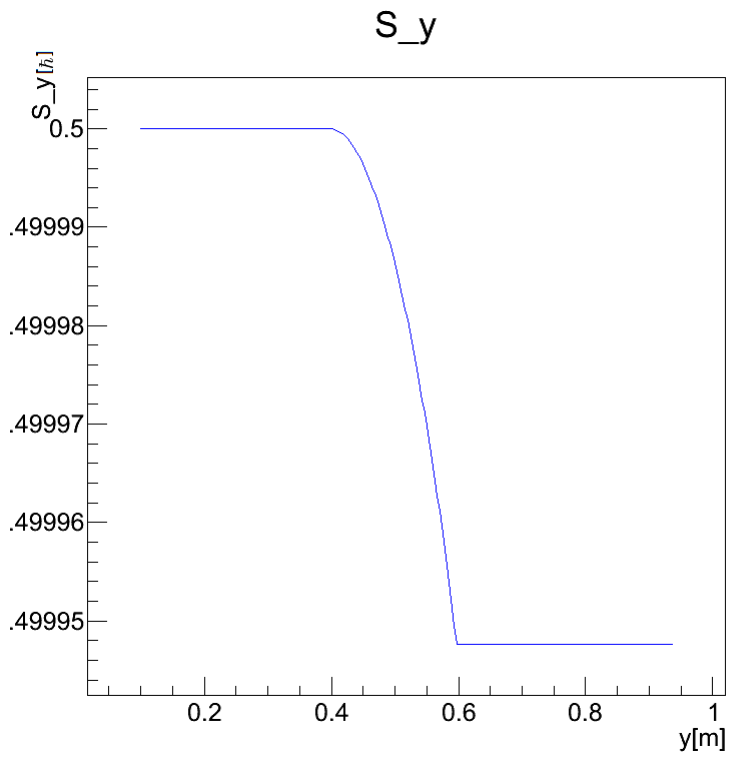


Abbildung 12: S_y beim Durchlaufen des Wienfilters

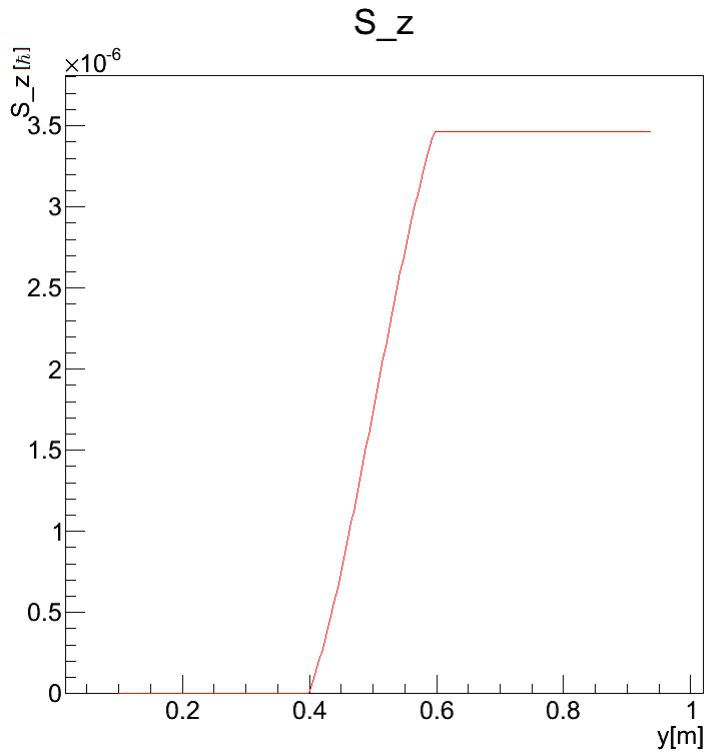


Abbildung 13: S_z beim Durchlaufen des Wienfilters

6.5 Betrachtung einer abweichenden Eintrittsposition

Die bisher gezeigten Graphen gingen davon aus, dass das Teilchen durch die Mitte des Kondensators fliegt. Man kann nun die numerischen Berechnungen überprüfen, indem das Teilchen auf zwei symmetrisch vom Mittelpunkt abweichenden Positionen betrachtet und die Ergebnisse vergleicht. Es wird also das Teilchen einmal rechts von dem Mittelpunkt in einem bestimmten Abstand in den Kondensator eingespeißt und danach wird in dem gleichen Abstand links vom Mittelpunkt die Simulation wiederholt. Dabei wird jedoch nur der Spin betrachtet, da das Teilchen, sollte es abgelenkt werden, immer in die gleiche Richtung abgelenkt wird und deshalb kein Vergleich gemacht werden kann.

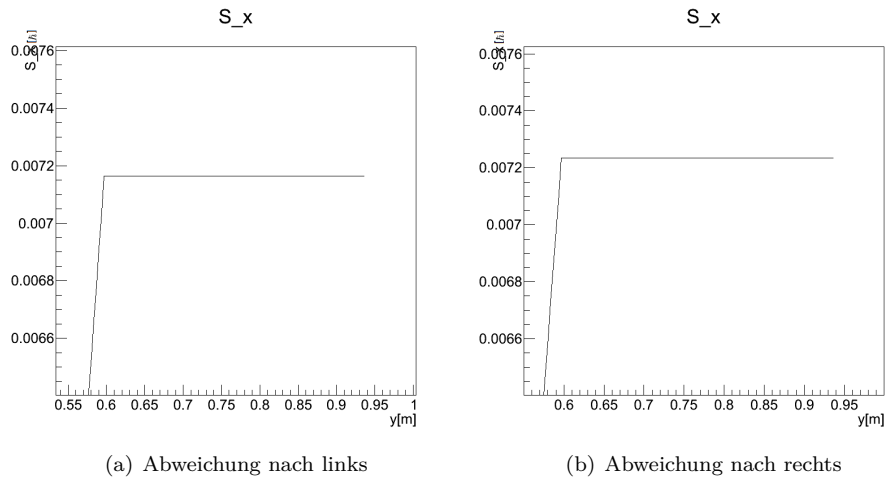


Abbildung 14: Vergleich der Spin x-Komponenten

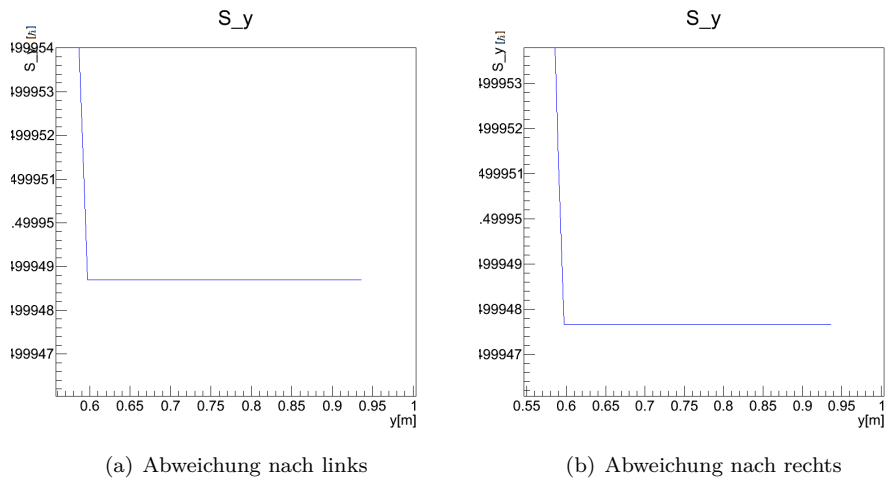


Abbildung 15: Vergleich der Spin y-Komponenten

In Abbildung 14 sind die x-Komponenten, in Abbildung 15 die y-Komponenten, jeweils 2cm abweichend vom Mittelpunkt in x-Richtung zu sehen. Allerdings kann man so nur vermuten, ob die Berechnung des Feldes in Ordnung verlaufen ist.

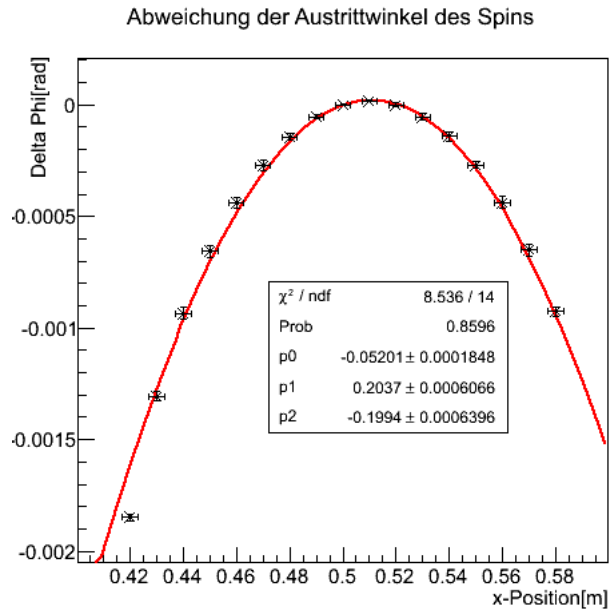


Abbildung 16: Vergleich der Winkelabweichung bei verschiedenen Austrittspositionen in x-Richtung

Eine bessere Methode ist es, die Abweichung der Winkel von dem Austrittswinkel bei mittigem Durchgang gegen verschiedene Austrittspositionen in x-Richtung aufzutragen. Der dabei entstehende Verlauf muss parabelförmig sein. In Abbildung 16 ist dieser Verlauf gut zu erkennen. Die Fehler auf die Position im Plattenkondensator wurden als gleichverteilte Fehler angenommen, die zwischen den Punkten der numerischen Berechnung des elektrischen Feldes liegen und ergeben sich zu $\sigma_x = 0.01/\sqrt{12}$ m. Man kann an der Parabel eine Abweichung des Maximums von der als Mitte angenommenen Position erkennen. Diese ist nicht bei 0.5m zu finden, sondern bei 0.5109 ± 0.0058 m. Die Fehler folgen dabei aus den von ROOT berechneten Fehlern durch Fehlerfortpflanzung. Dass der Wert bei 0.51m minimal über Null liegt folgt daraus, dass zuerst der mittige Wert bei 0.5m als maximaler Winkel angenommen wurde und er deshalb als Referenzwert dient. Das erwartete Maximum liegt bei 1.55633rad, welches sich jedoch durch die angegebenen Parameter des Fits zu 1.55634rad berechnen lässt. Man sieht also, dass die Abweichung vom Ausgangswert minimal ist.

Das χ^2/ndf liegt mit 0.61 in einem Bereich, der zu klein ist. Dies lässt sich durch die zu groß gewählten Fehler für die x- und y-Komponente des Spins erklären. Allerdings muss man auch feststellen, dass die Fehler untereinander korreliert sind und deshalb die Aussagekraft des χ^2/ndf geschwächt wird.

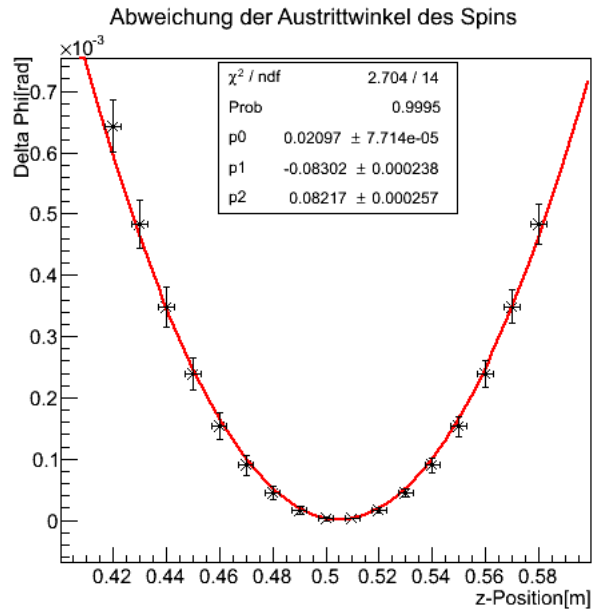


Abbildung 17: Vergleich der Winkelabweichung bei verschiedenen Austrittspositionen in z-Richtung

Man kann nun die gleichen Überlegungen auch für die z-Richtung durchführen. Dabei wird wieder der Austrittswinkel bei mittigem Durchgang als Referenzwert benutzt. Dies ist in Abbildung 17 zu sehen. Die Fehler wurden wie oben beschrieben angenommen.

Auch hier ist eine Abweichung des Extremums zu sehen. Allerdings ist es, im Gegensatz zu der vorherigen Betrachtung, ein Minimum. Die abweichende Position ist bei $0.5051 \pm 0.0022\text{m}$ zu finden. Das χ^2/ndf ist in diesem Fall kleiner als im vorherigen Plot.

Neben der Abweichung des Maximums und Minimums der Parabel von der erwarteten Position gibt das numerisch berechnete Feld zufriedenstellende Ergebnisse, mit denen man gut weiterarbeiten kann.

6.6 Auswirkungen des Randfeldes auf die Spindrehung

Um die Effekte des Randfeldes zu betrachten, wurde das Feld des Kondensators nun wie das magnetische Feld als homogen und ohne Randfeld angenommen. Nun wurde wieder das Teilchen durch den Kondensator getrackt, wobei die Teilchenbahn auch hier durch den Effekt des Wienfilters nicht abgelenkt wurde.

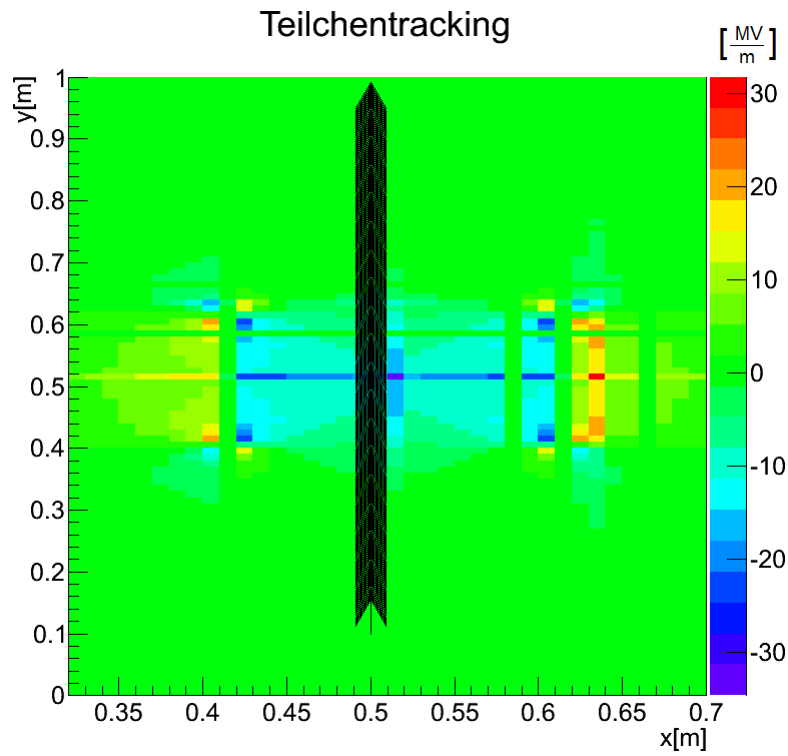


Abbildung 18: Durchlauf des Teilchens durch den Kondensator bei perfektem elektrischen Feld

Die Bahn des Teilchens durch das perfekte elektrische Feld des Kondensators ist in Abbildung 18 zu sehen.

Um ein Gefühl dafür zu bekommen, inwieweit das Randfeld die Ablenkung des Spins beeinflusst, wurde die Ablenkung durch das elektrische Feld ohne Randfeld als Referenzwert angenommen. Die Abweichung der Austrittswinkel ist in Abbildung 19 zu sehen.

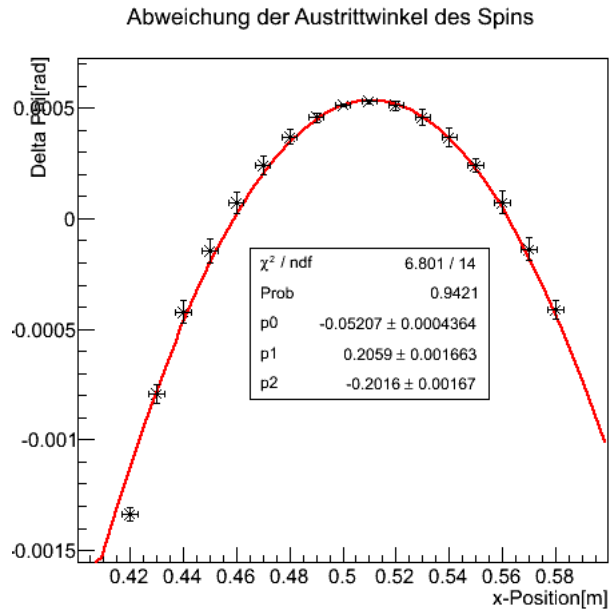


Abbildung 19: Winkelvergleich für die Effekte des Randfeldes

In diesem Graphen kann man erkennen, dass die Effekte des Randfeldes den Spin in der Mitte des Kondensators um 0.0005rad mehr auslenken, als es ohne Randfeld der Fall wäre. Mit Rücksicht auf das zuvor besprochene verschobene elektrische Feld in dem numerisch berechneten Kondensator schwenkt die Ablenkung des Spins bei $\Delta x = 0.05\text{m}$ um und der Spin wird nun durch das Randfeld weniger stark abgelenkt.

Zwar ist 0.0005rad für eine einfache Ablenkung relativ viel, aber man muss festhalten, dass ein Teilchen bei mehreren Durchläufen immer verschiedene Positionen des Kondensators durchläuft und somit teils konstruktive und teils destruktive Effekte des Randfeldes mitnimmt.

Die Fehler und das zu kleine χ^2/ndf folgen den gleichen Überlegungen, wie im vorherigen Kapitel.

Da im allgemeinen Fall ein Randfeld am Kondensator existiert, betrachtet man nun noch die Effekte, die das Randfeld selbst ausübt. Dazu werden wieder die x- und z-Richtung betrachtet, wobei der Wert bei mittlerem Durchgang als Referenzwert angenommen wird.

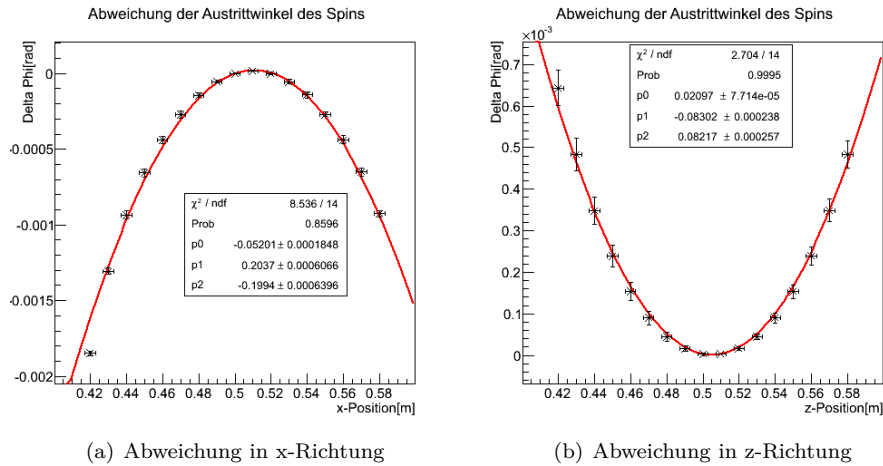


Abbildung 20: Vergleich der abweichenden Austrittswinkel

Diese Abbildungen sind in 20 nochmals zu sehen. Man kann erkennen, dass sich bei einem Abstand von 0.08m vom Mittelpunkt in x-Richtung der Winkel um ca 0.0019rad ändert, wobei er sich bei gleicher Abweichung in z-Richtung nur um ca 0.0007rad ändert. Also ist das Randfeld in x-Richtung wesentlich stärker, als in z-Richtung.

Eine Ablenkung von 0.002rad ist bei einer einzelnen Ablenkung nicht besonders viel, jedoch ist sie bei viele Durchläufen schon nicht mehr vernachlässigbar. Allerdings wird der Spin, sobald er in z-Richtung von der Mitte abweicht, in die genau entgegengesetzte Richtung ausgelenkt. Zwar ist dieser Effekt kleiner, doch er schwächt die Auslenkung ab, sodass die Effekte des Randfeldes kleiner werden. Da das Teilchen statistisch verteilt durch den Kondensator fliegt, spielen die Effekte, die das Randfeld ausübt, also nur eine kleinere Rolle. Das Feld in z-Richtung schwächt das x-Feld ab.

6.7 Fazit

Insgesamt ergab sich durch die numerischen Berechnungen ein elektrisches Feld, mit dem man gut arbeiten konnte. Zwar war das Feld in x-Richtung verschoben, doch konnte man diese einfach ausgleichen, sodass sie nicht weiter ins Gewicht fiel. Dadurch, dass die Fehler untereinander korreliert waren, ergab sich ein zu kleines χ^2/ndf , das aber nur wenig Aussagekraft hat. Man konnte trotz des kleinen Wertes durchaus die erwartete Verteilung erkennen.

Die Effekte, die sich bei der Abweichung des Austrittswinkels des Spins zeigen, sind teilweise sehr groß, heben sich aber bei mehreren Durchläufen größtenteils heraus, da das Teilchen statistisch verteilt in den Kondensator eintritt. Der Effekt ist sichtbar, aber nicht so groß, wie man ihn erwarten würde.

Abschließend ist noch zu sagen, dass der Kondensator in diesem Fall sehr groß gewählt wurde. Dies ändert aber nichts an den Ergebnissen. Würde man nämlich einen kleineren Kondensator definieren, mit einem kleineren Plattenabstand, so würde sich zwar die Feldstärke ändern, das Randfeld würde aber die gleichen Effekte hervorrufen.

Abbildungsverzeichnis

1	Oszillation des Spins in der Ringebene	7
2	Aufbau der Spinkomponente in der Ringebene bei perfekter Resonanz	8
3	Aufbau der Spinkomponente in der Ringebene ohne Resonanzbedingung	8
4	Aufbau der Spinkomponente in der Ringebene mit modulierter Frequenz	10
5	Aufbau der Spinkomponente in der Ringebene eines Teilchenpaketes	11
6	Oszillation der Spinkomponenten	12
7	Skizze zur Veranschaulichung der Schritte des Runge-Kutta-Verfahrens	15
8	Numerisch berechnetes Potential des Kondensators	17
9	Teilchenbahn eines Protons durch ein elektrisches Feld	18
10	Teilchenbahn eines Protons durch einen Wienfilter	19
11	S_x beim Durchlaufen des Wienfilters	20
12	S_y beim Durchlaufen des Wienfilters	21
13	S_z beim Durchlaufen des Wienfilters	22
14	Vergleich der Spin x-Komponenten	23
15	Vergleich der Spin y-Komponenten	23
16	Vergleich der Winkelabweichung bei verschiedenen Austritspositionen in x-Richtung	24
17	Vergleich der Winkelabweichung bei verschiedenen Austritspositionen in z-Richtung	25
18	Durchlauf des Teilchens durch den Kondensator bei perfektem elektrischen Feld	26
19	Winkelvergleich für die Effekte des Randfeldes	27
20	Vergleich der abweichenden Austrittswinkel	28

Literatur

- [1] <http://de.wikipedia.org/wiki/Finite-Elemente-Methode>.
- [2] mitarbeiter.hs-heilbronn.de/spieth/homepages/vorlesung/RungeKutta.pdf.
- [3] Andreas Lehrach; Bernd Lorentz; William Morse; Nikolai Nikolaev; Frank Rathmann. Precursor experiments to search for permanent electric dipole moments (EDMS) of protons and deuterons at COSY.
- [4] Yannis K. Semertzidis. Comparison of results from Yuri Orlov's analytical estimations and tracking using Runge-Kutta integration.