

Bachelorarbeit in Physik

Simulation der Diffusion von Elektronen in Driftkammern

von

Ilya Aleshin

im Dezember 2017

vorgelegt der

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN AN
DER RWTH AACHEN

angefertigt im

III. PHYSIKALISCHEN INSTITUT B

bei

PRIV. DOZ. DR. STEFAN ROTH

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Hintergrund	5
1.2	Aufbau	5
1.3	Ziel der Simulation	7
2	Durchführung und Auswertung der Simulation	9
2.1	Ladungsverteilung gegen Auftreffort	9
2.1.1	Bestimmung der Halbwertsbreite	9
2.1.2	Skala des Auftreffortes	14
2.2	Abhängigkeit der Standardabweichung der Ladungswolke (σ) von der Halbwertsbreite	15
2.3	Ermittlung der transversalen Diffusionskonstante	19
3	Fazit	23
4	Anhang	27

1 Einleitung

1.1 Hintergrund

Das Ziel des in Japan stationierten T2K-Experimentes (Tokai to Kamioka) ist es, Neutrino-Oszillationen zu untersuchen, indem der in Tokai erzeugte Neutrinostrahl eine Strecke von 295 km nach Kamioka zurücklegt und dort analysiert wird. Auf dem Weg nach Kamioka wird der Strahl bereits nach 280 m von seinem Startpunkt mit dem ND280 (Nahdetektor in 280 m Entfernung) analysiert [1, S.1]. An der Entwicklung dieser Nahdetektoren ist unter Anderem die Arbeitsgruppe des Physikalischen Instituts 3 B der RWTH Aachen beteiligt. Sie entwickelten in Aachen die Gasmonitorkammern, in denen unter Anderem Diffusion von Elektronen stattfindet, die in dieser Arbeit simuliert wird. Woher diese Elektronen kommen, wie deren Diffusion zustande kommt und wofür sie simuliert wird, wird in den nächsten Unterkapiteln (1.2 und 1.3) erläutert.

1.2 Aufbau

Eine für das T2K-Experiment entwickelte Gasmonitorkammer ist in Abbildung 1.1 schematisch dargestellt. Sie ist mit einem Gas gefüllt und besteht im Wesentlichen aus einem Drift- und Nachweisbereich, die durch ein feines Gitter (MicroMesh) getrennt sind. Aus einer γ -Quelle (^{55}Fe)^(*), gelangen die Photonen in den Driftbereich. Ein Photon ionisiert dort ein Gasatom und es wird ein Elektron freigesetzt [1, S.2]. Dieses Elektron ionisiert über Streuprozesse weitere Gasatome, sodass sich eine Elektronenwolke im Mittel aus 220 Elektronen bildet.

Desweiteren liegt im Driftbereich ein elektrisches Feld mit einer Feldstärke von 50 - 300 $\frac{\text{V}}{\text{cm}}$ an, das in Richtung des Nachweisbereiches gerichtet ist [1, S.5]. Deswegen wandert die Elektronenwolke zum MicroMesh. Auf dem Weg zum MicroMesh findet nun Diffusion statt: Die Elektronen streuen an weiteren Gasatomen, sodass die Elektronenwolke sich sowohl in die longitudinale, als auch in die transversale Richtung ausdehnt [1, S.2].

Am MicroMesh liegt eine Spannung im Bereich zwischen 350 V und 460 V an. Die ca. 100 μm große Lücke zwischen der Auslesefläche (Anode) und dem MicroMesh ist der Nachweisbereich. Dort herrscht ein elektrisches Feld der Feldstärke von ca. 40 $\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$. In diesem Nachweisbereich findet Gasverstärkung statt: Durch Stoßionisation schlagen stark beschleunigte Elektronen viele weitere Elektronen aus den Gasmolekülen heraus [1, S.5f], sodass pro jedes durch das MicroMesh pasierte Elektron im Mittel 2000 neue Elektronen entstehen. Durch die Erhöhung der Anzahl der Elektronen wird das Signal messbar.

(*): Im originalen Aufbau für T2K wird an den Stellen ^{90}Sr (β^- -Strahler) benutzt [1, S.1]. Dieser Aufbau ist daher gegenüber dem Originalen modifiziert.

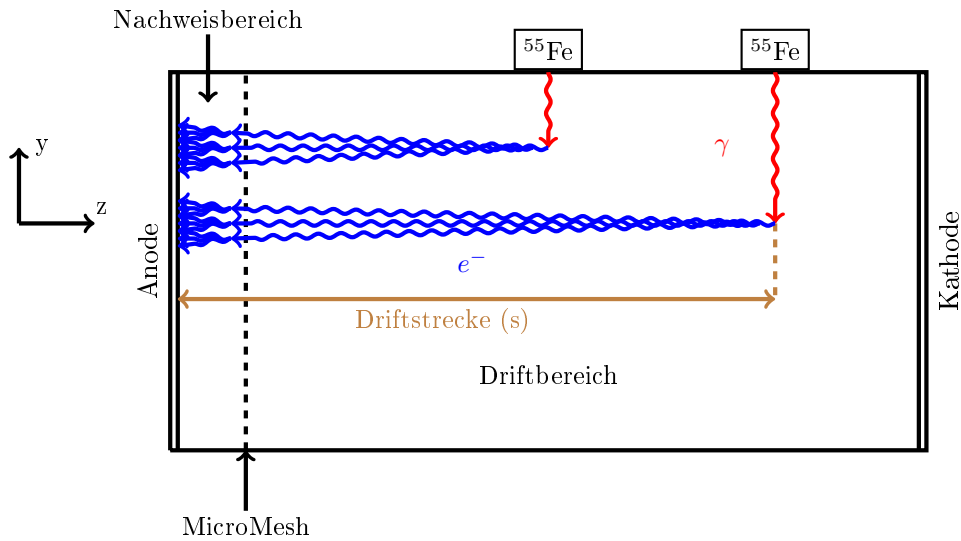


Abbildung 1.1: Gasmonitorkammer: y-z-Schnitt

Die Auslesefläche (Anode) besteht aus 5 Streifen, die jeweils 20 mm lang (y-Richtung) und 5 mm breit (x-Richtung) sind. In jedem Streifen sind 4 aus Kupfer bestehende Pads enthalten, die das Signal erfassen und durch weitere Auslesetechnik an den PC weiterleiten. In Abbildung 1.2 ist eine Simulation von einer Wolke aus 2000 Elektronen gezeigt. Der Schwerpunkt dieser liegt bei (0,0) mit einer Standardabweichung von 3 mm. Es wird gezeigt, wie die einzelnen Elektronen dann auf den 5 Streifen verteilt sind. Dieses Beispiel zeigt eine Verteilung der Elektronen auf den Streifen, die Gasverstärkung wird hier nicht berücksichtigt:

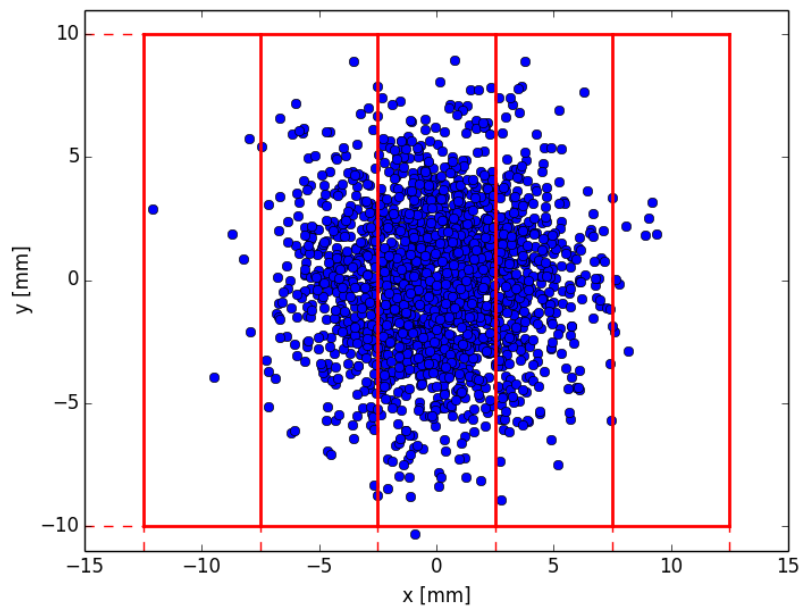


Abbildung 1.2: Auslesefläche (Anode): x-y-Ebene, Auftreffpunkte der 2000 Elektronen (blau) an 5 Streifen (Rot)

In Abbildung 1.3 wird die Anzahl der Elektronen auf den jeweiligen Streifen gegen den Mittelpunkt der x-Koordinate der jeweiligen Streifen aufgetragen: Zum Beispiel der Streifen, der in Abbildung 1.2 im Bereich zwischen 2,5 mm und 7,5 mm liegt, ist in Abbildung 1.3 bei 5 mm zu finden, dort treffen in diesem Beispiel 375 Elektronen auf.

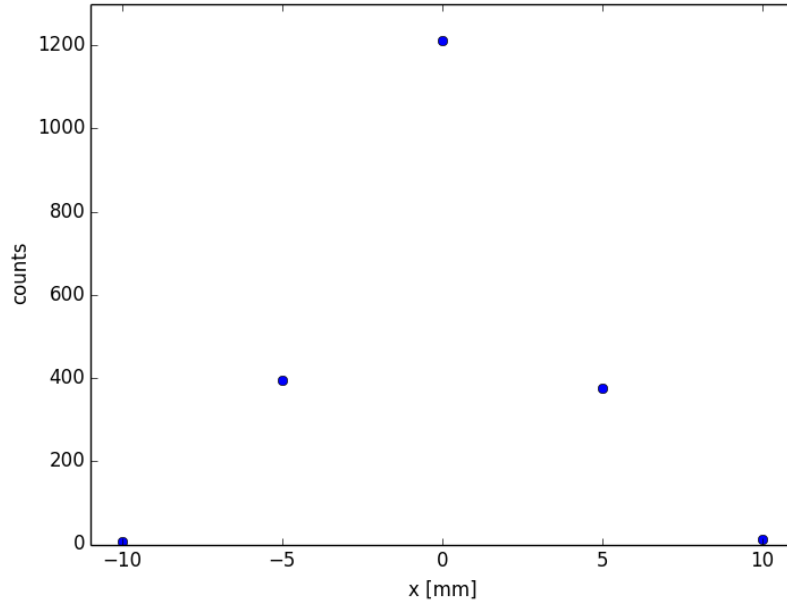


Abbildung 1.3: Anzahl der Elektronen (counts) auf den jeweiligen Streifen

1.3 Ziel der Simulation

Das Ziel der Simulationen aus den nachfolgenden Kapiteln ist es, zu überprüfen, ob man mit dem Aufbau aus dem vorigen Unterkapitel, die transversale Diffusionskonstante d_t des Gases bestimmen kann. Dazu werden solche Ereignisse, wie in Abbildung 1.2 gezeigt, mehrmals simuliert. Dabei wird bei jeder Simulation der Schwerpunkt zufällig variiert. Auch die Standardabweichung σ um den Schwerpunkt wird nicht wie in Abbildung 1.2 willkürlich festgelegt, sondern durch die Diffusionskonstante des gewählten Gases d_t und der gewählten Driftstrecke s bestimmt [2, S.69][3, S.15]:

$$\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t} = \sqrt{\frac{2 \cdot D}{v_d}} \cdot \sqrt{s} = d_t \cdot \sqrt{s} \quad (1.3.1)$$

Dabei ist D der Diffusionskoeffizient, t die Driftzeit und v_d die Driftgeschwindigkeit. Schließlich wird die Anzahl der auf die Streifen aufgetroffenen Elektronen (Ladung) gegen den Auftreffort aufgetragen (ähnlich wie in Abbildung 1.3). Allerdings wird in den nachfolgenden Kapiteln die Simulation mehrmals durchgeführt. Von der entstehenden Verteilung wird eine Halbwertsbreite gebildet. Dieser Vorgang wird für mehrere Driftstrecken bei einer bestimmten gegebenen Diffusionskonstante wiederholt und entsprechende Halbwertsbreiten werden notiert. Es wird ein Zusammenhang zwischen der Halbwertsbreite und der Driftstrecke hergestellt, wodurch die Diffusionskonstante ermittelt und mit dem gegebenen Wert verglichen werden kann.

2 Durchführung und Auswertung der Simulation

2.1 Ladungsverteilung gegen Auftreffort

2.1.1 Bestimmung der Halbwertsbreite

In Abschnitt 1.2 wurde neben dem Aufbau einer Gasmonitorkammer und dem Entstehen der Elektronenwolke im Driftbereich auch eine Beispielverteilung auf der Auslesefläche aus 2000 Elektronen mit dem Schwerpunkt bei (0,0) (s. Abbildungen 1.2 und 1.3) dargestellt.

Wie in Abschnitt 1.3 erwähnt, werden nun solche Ereignisse N mal gewürfelt und in eine einzige Grafik aufgetragen. Desweiteren werden auch die Schwerpunkte der Wolke bei jedem Würfeln zufällig im Bereich der Streifen festgelegt. Die Koordinaten dieser Schwerpunkte auf der Auslesefläche seien dann (a_i, b_i) mit $i \in [1, N]$ als Nummer des Wurfes. Dabei ist (a_i, b_i) um den Mittelpunkt der Auslesefläche in Abbildung 1.2 gleichverteilt.

Die Standardabweichung σ von dem Schwerpunkt lässt sich durch die Gleichung (1.3.1) bestimmen und ist bei einer gegebenen transversalen Diffusionskonstante d_t und einer Driftstrecke s für jeden Wurf gleich.

Außerdem werden die Achsen bei der Auftragung leicht geändert: Bei der y-Achse wird nicht nur die Ladung auf den jeweiligen Streifen betrachtet (wie in Abbildung 1.3), sondern diese wird durch die Gesamtladung q_{tot} normiert. Es wird also die relative Anzahl der Ladung $\frac{q}{q_{tot}}$ betrachtet. Für den Wurf Nummer i und den Streifen im Bereich k gilt dementsprechend:

$$\frac{q_{i,k}}{q_{tot,i}} = \frac{q_{i,k}}{\left(\sum_{k=1}^5 q_{i,k}\right)} \quad (2.1.1)$$

Dabei geht k von 1 bis 5 und beschreibt die Bereiche der Streifen auf der x-Achse: Z. B. für den Bereich $x = [-12.5, -7.5]$ gilt $k = 1$, usw. (s. Abb. 1.2).

Auch die x-Achse wird anders skaliert: Von dem Mittelpunkt der x-Koordinate der jeweiligen Streifens wird der Ladungsschwerpunkt, x_{mean} abgezogen. Dieser wird analog zum Massenschwerpunkt [4, S.40] bestimmt:

$$x_{mean,i} = \frac{q_{i,1} \cdot (-10) + q_{i,2} \cdot (-5) + q_{i,3} \cdot 0 + q_{i,4} \cdot 5 + q_{i,5} \cdot 10}{q_{tot,i}} \quad (2.1.2)$$

Es wird also $y_i = \left(\frac{q_{i,1}}{q_{tot,i}}, \frac{q_{i,2}}{q_{tot,i}}, \frac{q_{i,3}}{q_{tot,i}}, \frac{q_{i,4}}{q_{tot,i}}, \frac{q_{i,5}}{q_{tot,i}}\right) = \frac{q_{i,k}}{q_{tot,i}}$ gegen $x_i = x_k - x_{mean,i}$ für alle $i \in [1, N]$ in eine Grafik aufgetragen.

In Abbildung 2.1 ist ein Schema einer solchen Simulation dargestellt:

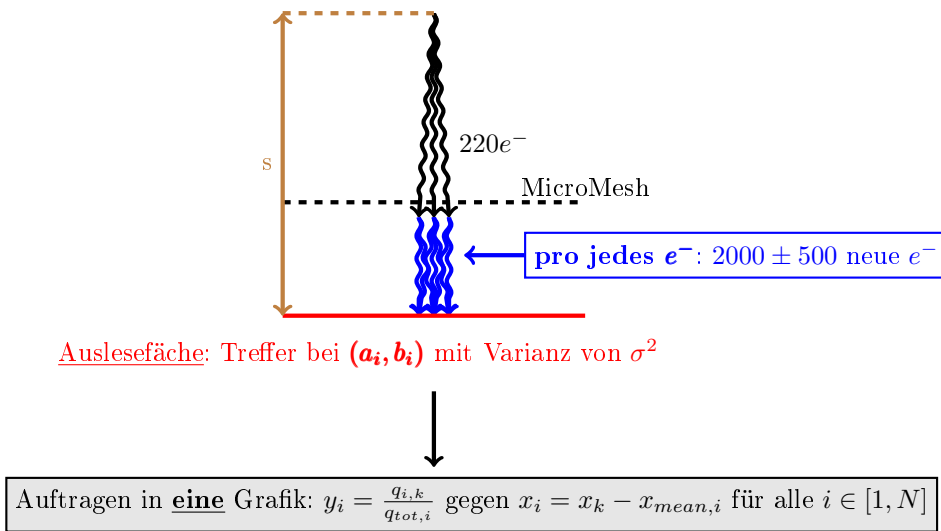


Abbildung 2.1: Schema einer solchen Simulation: Es wurde angenommen, dass die Anzahl der neuen Elektronen pro eins durch das MicroMesh passierte e^- um den Mittelwert von 2000 mit einer Standardabweichung von 500 normalverteilt ist.

Eine Grafik nach der Simulation beschrieben in der obigen Abbildung sieht für $N = 10$, $d_t = 0,42 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$ und $s = 15$ cm wie in Abbildung 2.2 aus:

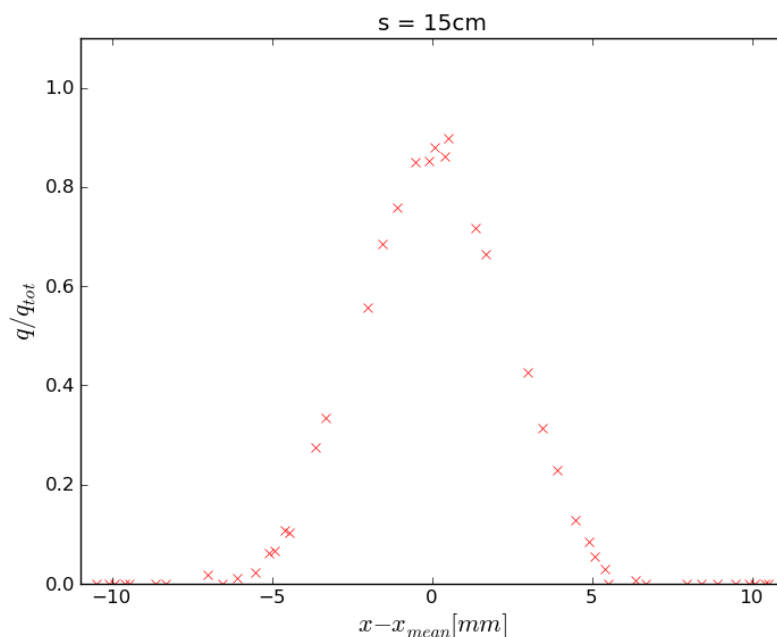


Abbildung 2.2: $N = 10$

Die Halbwertsbreite einer solchen Verteilung wird wie folgt bestimmt:

(1) Zunächst wird der maximale Punkt der Verteilung bestimmt. Der Punkt mit der höchsten relativen Ladungsverteilung ist meistens ein Ausreißer und repräsentiert nicht das Maximum. Deswegen werden von den Punkten im Bereich $x - x_{mean} = 0 \pm 0,5 \text{ mm} =: d$ die y-Koordinaten ausgelesen und aus diesen der Median [5, S.147f] gebildet:

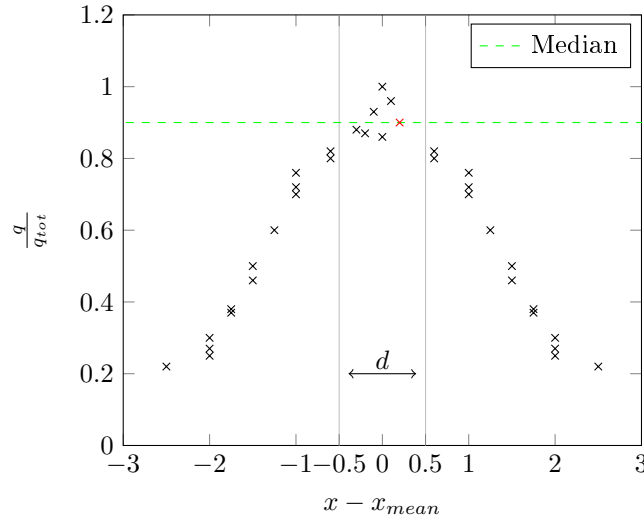


Abbildung 2.3: Skizze zu (1): Bestimmung des Medians im Bereich d

(2) Da auch der bei (1) bestimmte Punkt mit Koordinaten (x_{med}, y_{med}) sich nicht als ein stabiles Maximum der Verteilung eignet, werden in einem y-Bereich von $y_{med} \pm \sigma_{med}$ in d die y-Koordinaten der darin enthaltenen Punkte ausgelesen und abermals ein Median gebildet. Dabei gilt für σ_{med} [5, S.70f]:

$$\sigma_{med} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M (y_j - y_{med})^2}{M}} \quad (2.1.3)$$

y_j ist die y-Koordinate eines Punktes aus dem Bereich d (s. Abb. 2.3) und M die Anzahl dieser. Der neue Median y_{neu} wird nun als Maximum der Verteilung gesetzt:

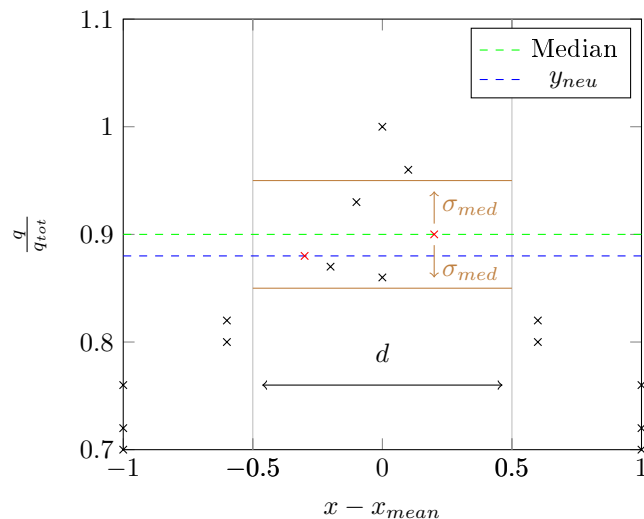


Abbildung 2.4: Skizze zu (2): Endgültige Bestimmung des Maximums (y_{neu}) der Verteilung

(3) Für die Halbwertsbreite braucht man die Hälfte der y-Koordinate des Maximums ($\frac{y_{neu}}{2}$). Die Schnittpunkte der Konstanten $c := \frac{y_{neu}}{2}$ mit der Verteilung sind dann die Endpunkte der Halbwertsbreite. Da dies eine diskrete Verteilung ist, sind diese Schnittpunkte ebenfalls nicht trivial zu finden: Es wird zunächst nach Punkten überhalb und unterhalb von c in der Verteilung gesucht, die jeweils den geringsten Abstand zu der Konstanten c haben. Durch diese beiden Punkte wird dann eine Gerade interpoliert und es wird ein Schnittpunkt zwischen c und der interpolierten Gerade ermittelt. Das Gleiche wird auch auf der anderen Seite der Verteilung durchgeführt. Die Halbwertsbreite ist der Abstand zwischen diesen beiden Schnittpunkten:

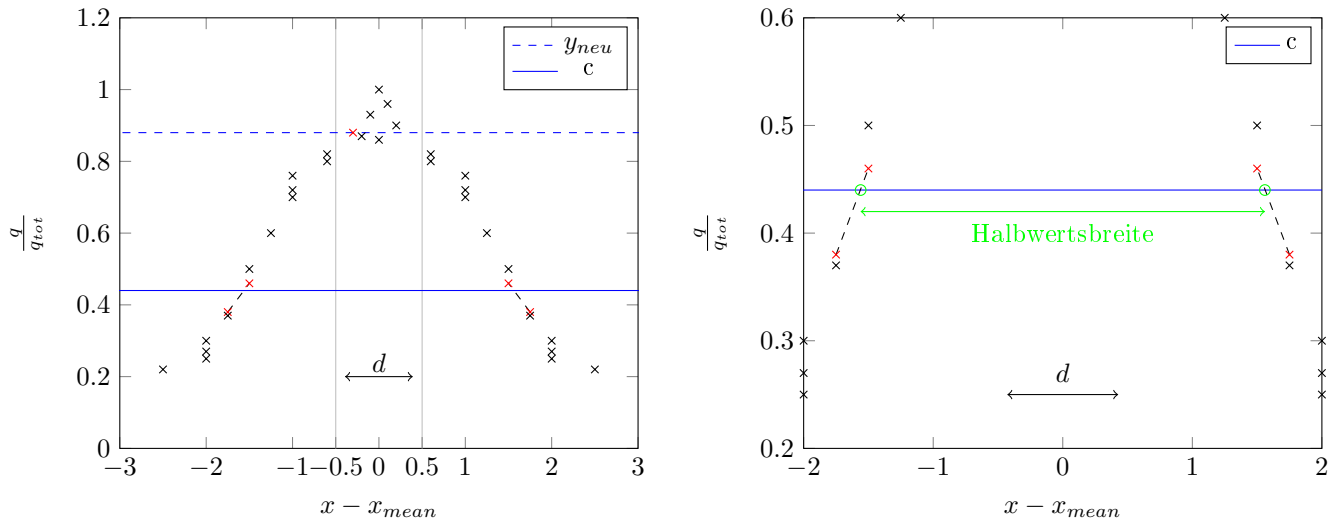


Abbildung 2.5: Skizze zu (3): Bestimmung der Halbwertsbreite (rechts: Vergrößert)

In Abbildungen 2.6 - 2.8 werden nun die in den Abbildungen 2.1 - 2.5 beschriebenen Simulationen für $N = 1000$ mit $d_t = 0,42 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$ für 3 verschiedene Driftstrecken durchgeführt.

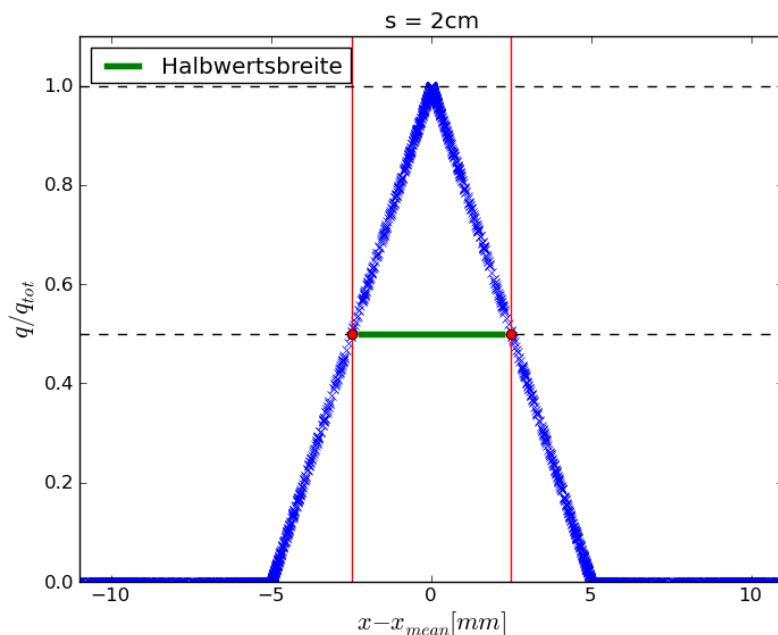


Abbildung 2.6: Ladungsverteilung gegen Auftreffort für $s = 2$ cm und $d_t = 0,42 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$

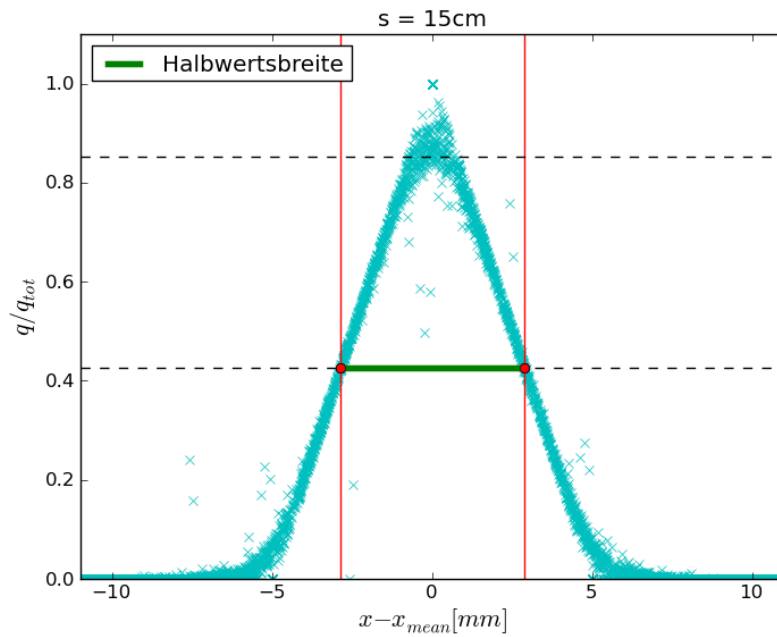


Abbildung 2.7: Ladungsverteilung gegen Auftreffort für $s = 15$ cm und $d_t = 0,42 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$

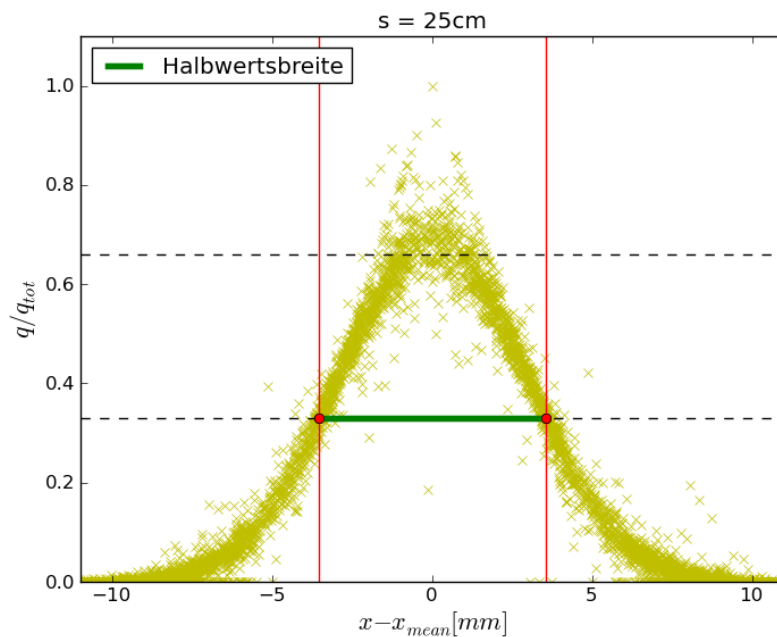


Abbildung 2.8: Ladungsverteilung gegen Auftreffort für $s = 25$ cm und $d_t = 0,42 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$

An den obigen 3 Abbildungen ist zu erkennen, dass bei geringen Driftstrecken die Verteilung einem Dreieck ähnelt. Bei größeren Driftstrecken verschmiert die Verteilung. Genaue Fitfunktionen für die Verteilungen werden in dieser Arbeit nicht ermittelt. Im Weiteren wird mit den Halbwertsbreiten der Verteilungen für weitere Driftstrecken und Diffusionskonstanten gearbeitet.

2.1.2 Skala des Auftreffortes

Nun wird eine andere Skalierung der x-Achse ausprobiert: Anstatt $x - x_{mean,i}$ (s. Gleichung (2.1.2)) wird $x - a_i$ verwendet. Dabei ist a_i der Eingangsparameter der Simulation und gibt die x-Koordinate des Schwerpunkts der Ladungswolke beim i-ten Wurf an.

Die beiden Skalierungen werden in Abbildungen 2.9 - 2.11 für $N = 1000$ Würfe und $d_t = 0,42 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$ miteinander verglichen. Dort sieht man, dass die Verteilungen kleinen Driftstrecken wenig übereinstimmen. Bei größeren Driftstrecken hingegen sind die Verteilungen fast identisch:

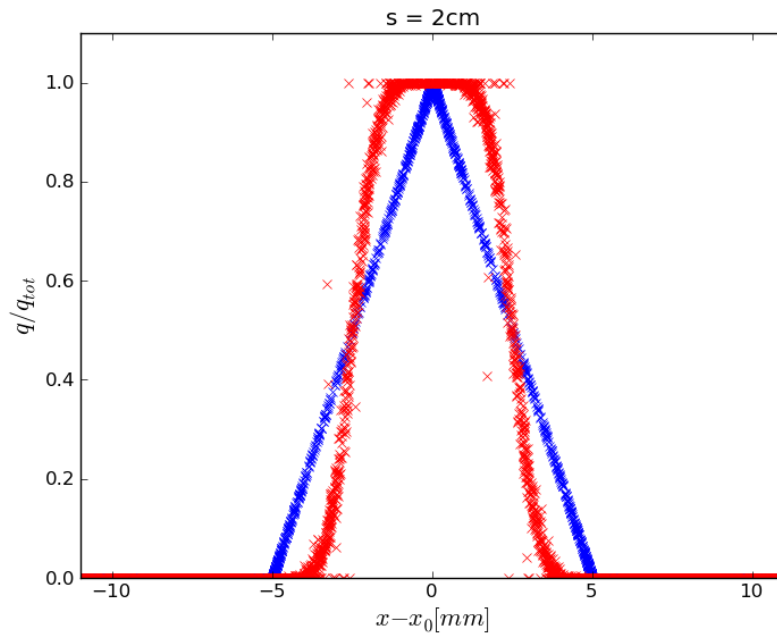


Abbildung 2.9: rot: $x_0 = a$; blau: $x_0 = x_{mean}$

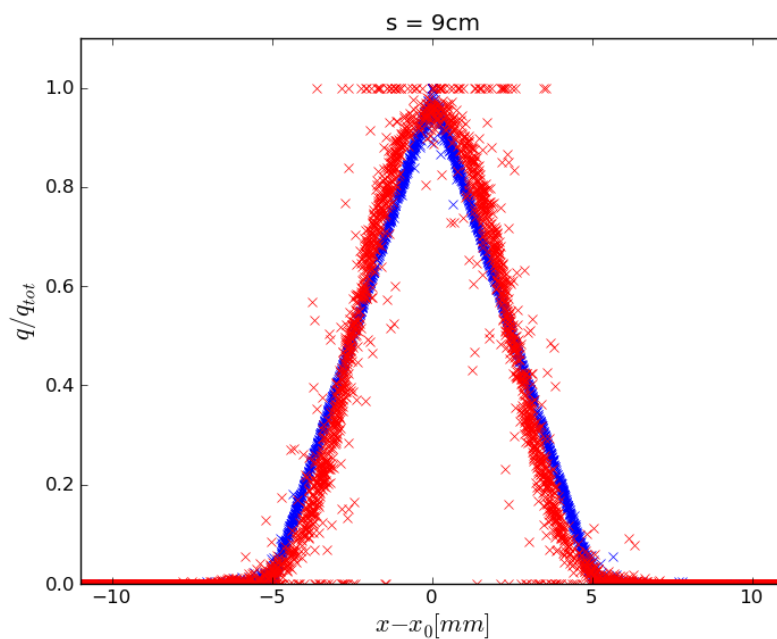
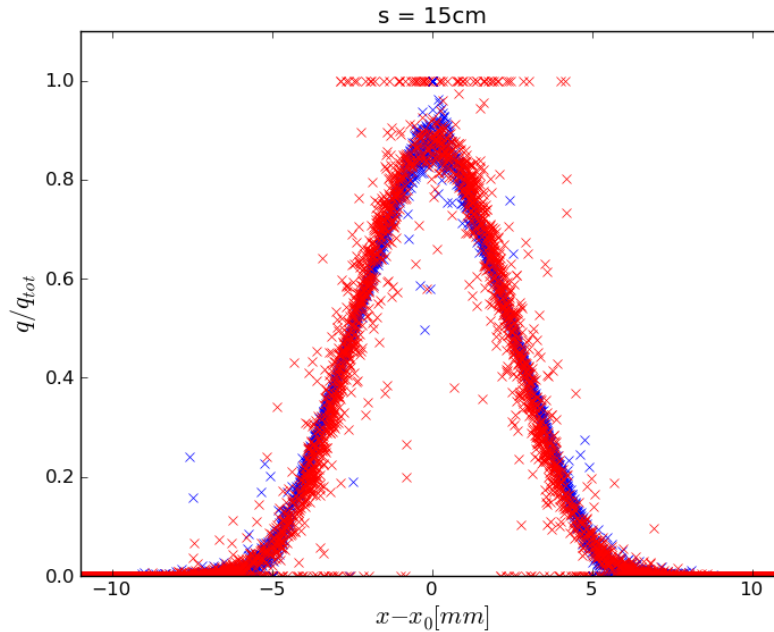


Abbildung 2.10: rot: $x_0 = a$; blau: $x_0 = x_{mean}$


 Abbildung 2.11: rot: $x_0 = a$; blau: $x_0 = x_{mean}$

Im Weiteren wird $x - x_{mean,i}$ stets als Skalierung verwendet.

2.2 Abhängigkeit der Standardabweichung der Ladungswolke (σ) von der Halbwertsbreite

In diesem Unterkapitel wird ein Zusammenhang zwischen der Standardabweichung σ (s. Gleichung (1.3.1)) und der Halbwertsbreite der Ladungsverteilung bestimmt. Es wird mit 5 Diffusionskonstanten gearbeitet. Von diesen ist eine keinem Gas zuzuordnen. Dies ist die Beispielkonstante, die in vorigen Unterkapitel 2.1 benutzt wurde, $d_t = 0,42 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$. Die anderen 4 Diffusionskonstanten sind jeweils einem Gas zuzuordnen. Auf der in [6] verzeichneten Seite kann man für ein bestimmtes Gas die transversale Diffusionskonstante ablesen. Braucht man zum Beispiel die Diffusionskonstante für ein bestimmtes Gas, sind auf der Webseite [6] folgende Punkte zu beachten:

- (1) Die Zusammensetzung des Gases muss bekannt sein.
- (2) Für unsere Simulation gilt stets $B = 0,0T$.
- (3) Die Driftgeschwindigkeit v_d erreicht für einen bestimmten Wert für $\frac{ET}{p}$ ihr Maximum. Bei genau diesem Wert für $\frac{ET}{p}$ liest man den Wert für die transversale Diffusionskonstante d_t ab.

Die Diffusionskonstanten für die anderen Gase werden nach dem oben beschriebenen Schema bestimmt, da die Zusammensetzung dieser bekannt ist. In Tabelle 2.1 werden für alle hier verwendeten Gase die Diffusionskonstanten angegeben.

Gasbezeichnung	Gaszusammensetzung	$d_t \left[\frac{mm}{\sqrt{cm}} \right]$
T2K - Gas	95 % Ar; 3 % CF ₄ ; 2 % C ₄ H ₁₀	0,324
Beispielgas	-	0,420
Sagox 18	82 % Ar; 18 % CO ₂	0,477
P10	90 % Ar; 10 % CH ₄	0,588
P5	95 % Ar; 5 % CH ₄	0,750

Tabelle 2.1: Diffusionskonstanten

Nach dem Muster im Abschnitt 2.1.1 werden $40 \cdot X$ Halbwertsbreiten ermittelt. Die Zahl 40 ergibt sich aus 8 Driftstrecken pro 5 oben angegebenen Diffusionskonstanten. Die Zahl X gibt die Anzahl der Durchführungen an: Pro Driftstrecke und Diffusionskonstante ergibt sich nach einer Durchführung ($X = 1$) eine Verteilung mit Halbwertsbreite wie in Abbildungen 2.6 - 2.8. Nun werden diese Simulationen $X = 100$ mal durchgeführt. Es ergeben sich dementsprechend 100 Verteilungen, also auch 100 Halbwertsbreiten pro bestimmte Diffusionskonstante und Driftstrecke. Insgesamt ergeben sich also $40 \cdot 100$ Halbwertsbreiten.

Der oben beschriebene Vorgang findet für $N = 1000$ statt. Dabei ist N die Anzahl der Würfe aus Abbildung 2.1. In Abbildung 2.12 wird der gesamte Vorgang durch die Fortsetzung der Abbildung 2.1 visualisiert:

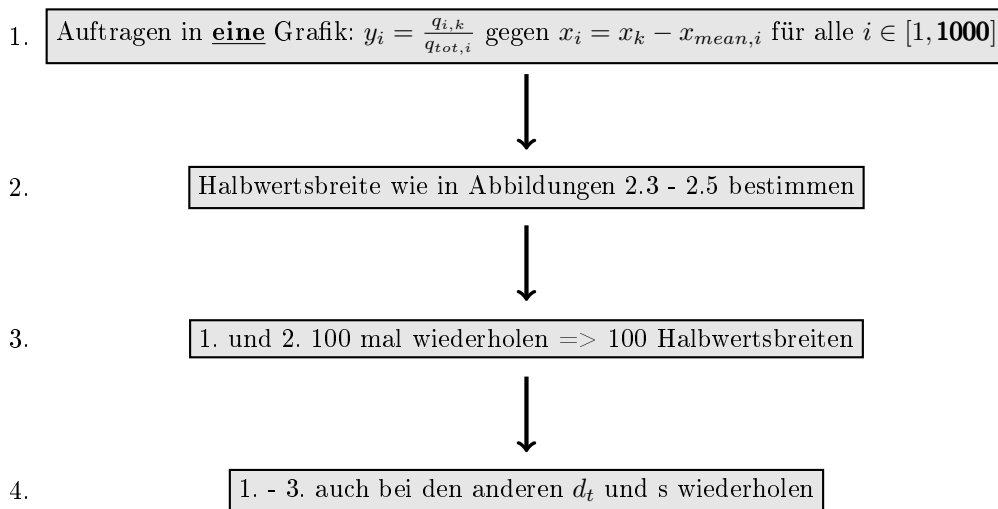


Abbildung 2.12: Fortsetzung der Abbildung 2.1, allerdings für $N = 1000$ ($i \in [1, 1000]$)

Bei jeder der 40 Kombinationen von d_t und s wird von 100 Halbwertsbreiten ein Mittelwert μ und ein mittlerer Fehler darauf σ_m gebildet. Für σ_m , mit h als Halbwertsbreite, gilt [7]:

$$\sigma_m = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{100} (h_n - \mu)^2}}{100} \quad (2.2.1)$$

In Tabellen 4.1 - 4.5 (Anhang) sind alle 40 Mittelwerte der Halbwertsbreiten mit den jeweiligen mittleren Fehlern angegeben. Dabei ist beim T2K-Gas (Tabelle 4.1) bei $s = 2$ cm auffällig, dass dort $\sigma_m = 0$ gilt. Das bedeutet, dass die Ladungswolke immer komplett auf einem einzigen Streifen landet und die Halbwertsbreite der Ladungsverteilung immer dieselbe ist. In Abbildung 2.13 wurde jedoch diesem Punkt ein sehr geringer Fehler, nämlich der für $s = 4$ cm ($\approx 0,0009$ mm), zugeordnet.

In Abbildung 2.13 wurden die Mittelwerte der Halbwertsbreite μ mit deren mittleren Fehlern σ_m gegen Standardabweichungen der Ladungswolke σ aufgetragen. Dabei lässt sich σ aus mit Gleichung (1.3.1) bestimmen. Für die Halbwertsbreite h gilt also:

$$h = \mu \pm \sigma_m \tag{2.2.2}$$

Der Fit in Abbildung 2.13 wurde nicht für alle 40 Werte durchgeführt. Für die letzten 3 Werte aus der Tabelle 4.5 (Anhang) wurde der Fit nicht durchgeführt, da dieser sonst keine vernünftige Anpassung wäre, viele Punkte also verfehlen würde. Dennoch wurden diese Werte mitgezeichnet: Es sind die Werte rechts außen in der Abbildung. In dem Rechteck aus den gestrichelten Linien, also für $\sigma \in [0,4582 \text{ mm}; 2,2773 \text{ mm}]$ und $h \in [5,0 \text{ mm}; 6,8037 \text{ mm}]$, ist der Fit gültig.

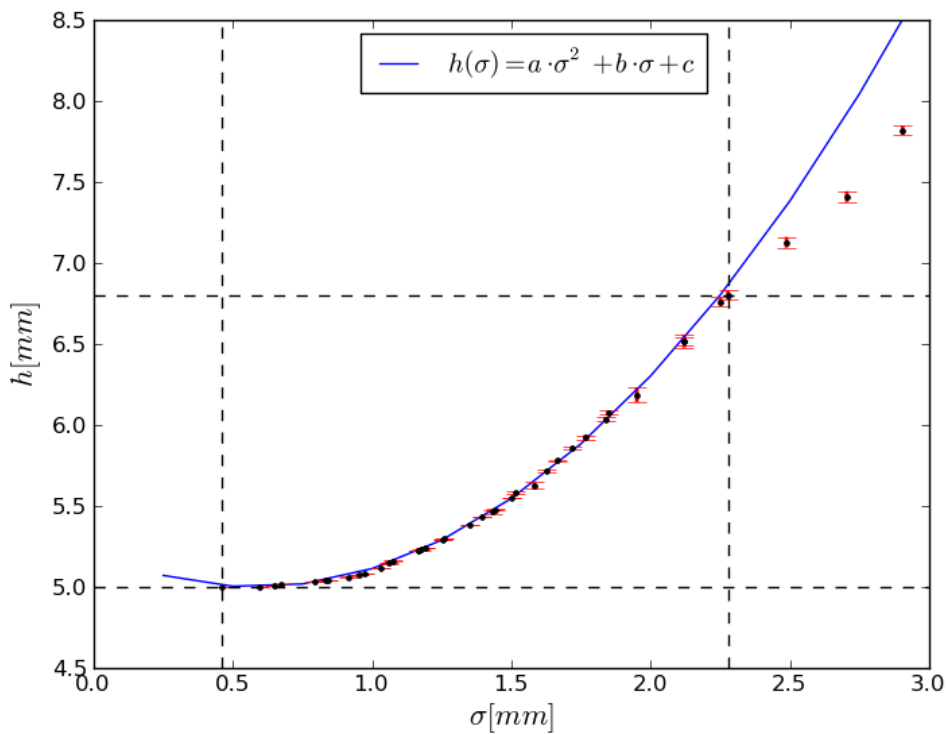


Abbildung 2.13: Mittelwerte (Schwarz) mit deren Fehlern (Rot) und ein parabolischer Fit (Blau)

Die Parameter a, b, c der Fitfunktion $h(\sigma)$ mit deren Fehlern lauten:

$a = a_m \pm a_e$		$b = b_m \pm b_e$		$c = c_m \pm c_e$	
a_m	a_e	b_m	b_e	c_m	c_e
0,6473	0,0029	-0,7523	0,0054	5,2189	0,0022

Tabelle 2.2: Parameter der Fitfunktion

In Abbildung 2.13 wurden also nur 37, anstatt 40 Werte angepasst. Für χ^2 gilt dementsprechend [8]:

$$\chi^2 = \sum_{y=1}^{37} \left(\frac{\mu_y - h(\sigma_y)}{\sigma_{m,y}} \right)^2 = 185,115 \quad (2.2.3)$$

Dabei sind μ_y und $\sigma_{m,y}$ aus den Tabellen 4.1 - 4.5 (Anhang).

Nun wird $\frac{\chi^2}{ndf}$ für den Fit bestimmt, mit ndf als Anzahl der Freiheitsgrade. ndf erhält man durch die Differenz der Anzahl der Messwerte (= 37) von der Anzahl der Fitparameter (= 3) [9]:

$$\chi^2 = 185,115 \text{ mit } ndf = 37 - 3 = 34 \Rightarrow \frac{\chi^2}{ndf} = \mathbf{5,444} \quad (2.2.4)$$

$\frac{\chi^2}{ndf}$ sagt aus, wie präzise die Fitfunktion die 37 Werte mit deren Fehlerbalken trifft. Dabei ist $\frac{\chi^2}{ndf}$ von 5,444 nicht weit entfernt vom idealen Wert $\frac{\chi^2}{ndf} = 1$.

Nun werden in Abbildung 2.14 die Achsen aus Abbildung 2.13 vertauscht: Es wird die Abhängigkeit der Standardabweichung σ von der Halbwertsbreite h ermittelt. In dieser Abbildung wurde kein Fit durchgeführt, sondern es wurde eine Umkehrfunktion aus dem Fit in Abb. 2.13 gebildet. Dabei wurden die Parameter a , b und c aus Tabelle 2.2 übernommen. Auch für das $\frac{\chi^2}{ndf}$ gilt der gleiche Wert. Diese Umkehrfunktion $\sigma(h)$ wird im Unterkapitel 2.3 weiterverwendet.

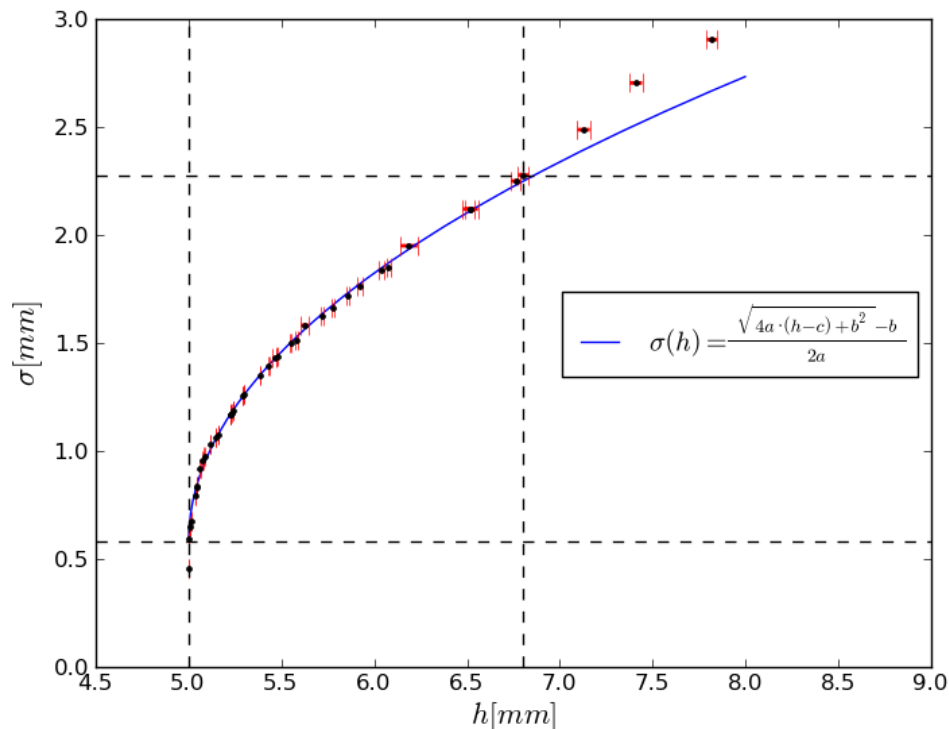


Abbildung 2.14: Mittelwerte (Schwarz) mit deren Fehlern (Rot) und $\sigma(h)$ (Blau)

In obiger Abbildung ist auffällig, dass der Punkt mit der kleinsten Halbwertsbreite aus dem Gültigkeitsbereich herausgenommen wurde, obwohl dieser in Abbildung 2.13 mitangepasst wurde. Dies kommt dadurch zustande, dass die in obiger Abbildung gezeichnete Funktion nur bis zu einer Halbwertsbreite von 5,0003 mm gültig ist. Für den Gültigkeitsbereich in obiger Abbildung gilt also $\sigma \in [0,5811 \text{ mm}; 2,2773 \text{ mm}]$ und $h \in [5,0003 \text{ mm}; 6,8037 \text{ mm}]$ (mehr dazu im Kapitel 3).

2.3 Ermittlung der transversalen Diffusionskonstante

Die Funktionsgleichung für die Abhängigkeit der Standardabweichung der Ladungswolke σ von der Halbwertsbreite der Ladungsverteilung h lautet also:

$$\sigma(h) = \frac{\sqrt{4 \cdot a \cdot (h - c) + b^2} - b}{2 \cdot a}; \text{ mit } a, b, c \text{ aus Tabelle 2.2} \quad (2.3.1)$$

Desweiteren gilt:

$$\sigma^2(h) = \frac{[2 \cdot a \cdot (h - c)] + b^2 - [b \cdot \sqrt{4 \cdot a \cdot (h - c) + b^2}]}{2 \cdot a^2}; \text{ mit } a, b, c \text{ aus Tabelle 2.2} \quad (2.3.2)$$

Es gilt $h = \mu \pm \sigma_m$ (s. Gleichung 2.2.2). In Tabellen 4.6 - 4.10 (Anhang) werden die Werte für $\sigma^2(\mu)$, mit μ aus Tabellen 4.1 - 4.5 (Anhang) aufgetragen. Auch werden die mittleren Fehler Δ darauf aufgetragen. Diese wurden analog zu σ_m aus Gleichung (2.2.1) bestimmt. Es gilt:

$$\sigma^2(h) = \sigma^2(\mu) \pm \Delta \quad (2.3.3)$$

Nun wird die transversale Diffusionskonstante d_t anhand von gegebenen Halbwertsbreiten und Driftrecken ermittelt. Dazu wird in Abbildung 2.15 $\sigma^2(\mu) \pm \Delta$ gegen die bekannten Driftstrecken von $s = [2 \text{ cm}, 4 \text{ cm}, 6 \text{ cm}, 8 \text{ cm}, 9 \text{ cm}, 11 \text{ cm}, 13 \text{ cm}, 15 \text{ cm}]$ aufgetragen. Dabei sind die Werte für $\sigma^2(\mu)$ und Δ im Anhang (Tabellen 4.6 - 4.10) zu finden.

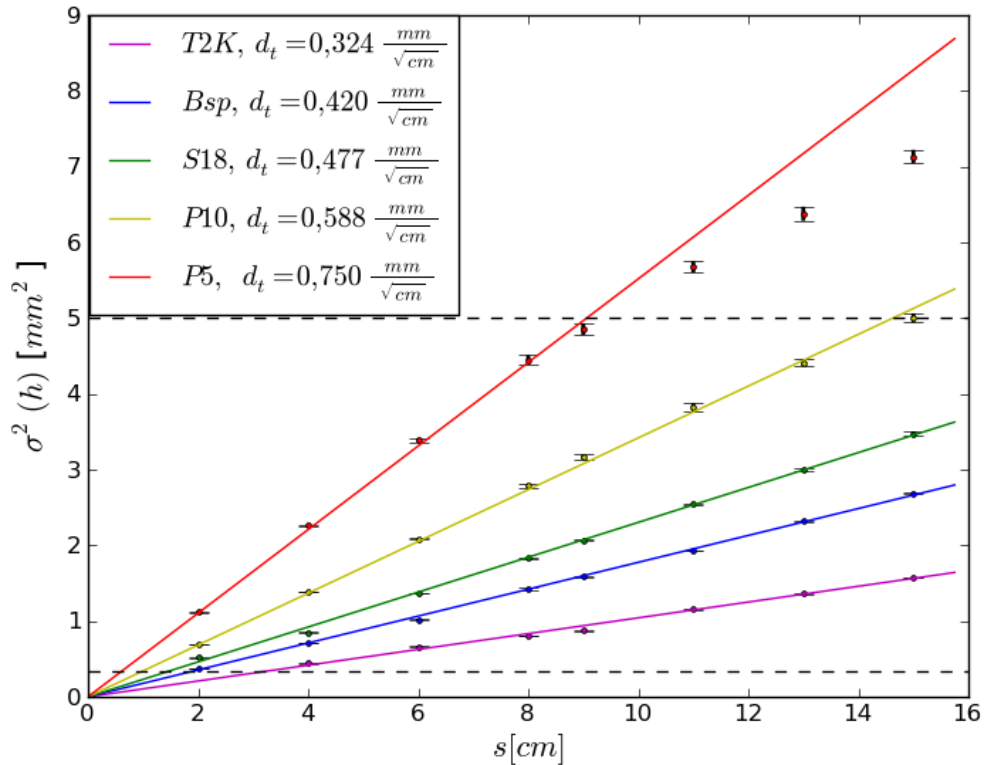


Abbildung 2.15: Es wurden nur die Punkte zwischen den beiden gestrichelten Linien angepasst.

Gasbezeichnung	ndf	$\frac{\chi^2}{ndf}$
T2K-Gas	6	10,3718
Beispielgas	7	1,8351
Sagox 18	7	7,2788
P 10	7	2,3417
P 5	4	2,6902

Tabelle 2.3: $\frac{\chi^2}{ndf}$ für alle 5 Geraden. Dabei wurden χ^2 und ndf analog zu den Gleichungen (2.2.3) und (2.2.4) bestimmt.

Für den Gültigkeitsbereich in Abbildung 2.15 (zwischen den beiden gestrichelten Linien) gilt:

$$\sigma^2(h) \in [0,338 \text{ mm}^2; 5,003 \text{ mm}^2] \quad (2.3.4)$$

Dabei ergibt sich die Untergrenze aus der in Abbildung 2.14 kleinsten annehmbaren Halbwertsbreite von $\sigma(h)$. Diese lautet:

$$h_{min} = 5,0003 \text{ mm} \quad (2.3.5)$$

Die Untergrenze ergibt sich dann dementsprechend aus $\sigma^2(h_{min})$. Die Obergrenze lässt sich durch $\sigma^2(\mu)$ bei $s = 15 \text{ cm}$ aus Tabelle 4.9 (Anhang) bestimmen.

Es ergeben sich also 5 Geraden für die 5 verwendeten Gase. Die Funktionsgleichung einer solchen Gerade lautet also:

$$\sigma^2(h) = \underbrace{(m_0 \pm m_e)}_m \cdot s \quad (2.3.6)$$

Dabei sei m_e der statistische Fehler der Steigung. Die Quadratwurzel aus der Steigung einer solchen Gerade $\sqrt{m} =: \delta$ soll laut Gleichung (1.3.1) die transversale Diffusionskonstante ergeben. Bei der Bestimmung dieser wurden sowohl statistische ϵ , als auch systematische σ_o & σ_u Fehler mitberücksichtigt:

$$\delta = \delta_0 \pm \epsilon \pm \sigma_o \pm \sigma_u \quad (2.3.7)$$

Während m_e mittels `scipy.optimize.curve_fit` bestimmt wurde, wurde die entsprechende Fehlerfortpflanzung [10, S.166] auf ϵ durchgeführt:

$$\epsilon = \sqrt{\left[\frac{d\delta(m)}{dm} \right]_{m=m_0}^2 \cdot m_e^2} = \sqrt{\frac{m_e^2}{4 \cdot m_0}} \quad (2.3.8)$$

Die systematischen Fehler σ_o & σ_u kommen dadurch zustande, dass die Parameter a, b, c der Funktion $\sigma^2(h)$ ebenfalls statistische Fehler a_e, b_e, c_e besitzen. Diese wurden in Tabelle 2.2 dargestellt. Für ein Gas (eine Gerade) werden die systematischen Fehler nach folgendem Schema bestimmt: **(1)** Zunächst wird eine Tabelle aus allen (27) möglichen Kombinationen für a, b, c erstellt. Danach wird für jede Kombination $\delta = \sqrt{m}$ ermittelt.

1.	a	b	c	δ_0
2.	$a + a_e$	b	c	δ_1
:	:	:	:	
:	:	:	:	
27.	$a - a_e$	$b - b_e$	$c - c_e$	δ_{26}

Tabelle 2.4

(2) Von 26 Werten wird ein Minimum $\text{Min} = \min(\delta_1, \dots, \delta_{26})$ und ein Maximum $\text{Max} = \max(\delta_1, \dots, \delta_{26})$ bestimmt. Es sind lediglich 26 Werte, da δ_0 herausgenommen wurde.

(3) Schließlich gilt für die systematischen Fehler:

$$\sigma_o = |\delta_0 - \text{Max}|; \quad \sigma_u = |\delta_0 - \text{Min}| \quad (2.3.9)$$

Die Schritte (1) bis (3) wurden nun für alle 5 Gase durchgeführt. In Tabelle 2.5 werden nun die Wurzeln aus den Steigungen der Geraden aus Abbildung 2.15 mit deren systematischen und statistischen Fehlern dargestellt. Desweiteren werden diese mit den vorgegebenen Diffusionskonstanten verglichen.

Gasbezeichnung	$d_t \left[\frac{mm}{\sqrt{cm}} \right]$	$\delta \left[\frac{mm}{\sqrt{cm}} \right]$	$\pm \epsilon \left[\frac{mm}{\sqrt{cm}} \right]$	$\begin{matrix} +\sigma_o \\ -\sigma_u \end{matrix} \left[\frac{mm}{\sqrt{cm}} \right]$
T2K-Gas	0,324	0,32287	$\pm 0,00102$	$\begin{matrix} +0,00651 \\ -0,00479 \end{matrix}$
Beispielgas	0,420	0,42138	$\pm 0,00105$	$\begin{matrix} +0,00494 \\ -0,00429 \end{matrix}$
Sagox 18	0,477	0,47992	$\pm 0,00128$	$\begin{matrix} +0,00450 \\ -0,00433 \end{matrix}$
P 10	0,588	0,58469	$\pm 0,00259$	$\begin{matrix} +0,00421 \\ -0,00417 \end{matrix}$
P 5	0,750	0,74281	$\pm 0,00386$	$\begin{matrix} +0,00514 \\ -0,00510 \end{matrix}$

Tabelle 2.5: Ermittelte Diffusionskonstanten (3. - letzte Spalte)

Anhand der obigen Tabelle kann man erkennen, dass alle 5 vorgegebene Werte von d_t innerhalb des Fehlerbereichs von den ermittelten δ liegen. Dennoch befindet sich der Wert für das P5-Gas sehr nah an der oberen Grenze des Fehlerbereichs. Dies lässt sich vor allem dadurch erklären, dass bei dieser Diffusionskonstante nur 5 von 8 Werten in Abbildung 2.13 und dementsprechend auch in Abbildung 2.15 angepasst wurden.

In Abbildungen 4.1 - 4.5 (Anhang) werden die Geraden einzeln aufgetragen. Desweiteren wird dort für jede Gerade $\frac{\chi^2}{ndf}$ nochmals angegeben, allerdings mit mehr Nachkommastellen, als in Tabelle 2.3.

3 Fazit

Wie im vorigen Kapitel erläutert, sind die Funktionen $h(\sigma)$ und $\sigma(h)$ nur für einen bestimmten Bereich von σ und Halbwertsbreite eine geeignete Näherung. In diesem Kapitel werden die Randbereiche näher betrachtet und Schlüsse daraus gezogen.

Nun sind die Untergrenze der Gültigkeitsbereiche in den Abbildungen 2.13 und 2.14 unterschiedlich festgelegt. In Abbildung 3.1 lässt sich zeigen, warum sowohl für $h(\sigma)$, als auch für $\sigma(h)$ ein identischer Gültigkeitsbereich gelten soll:

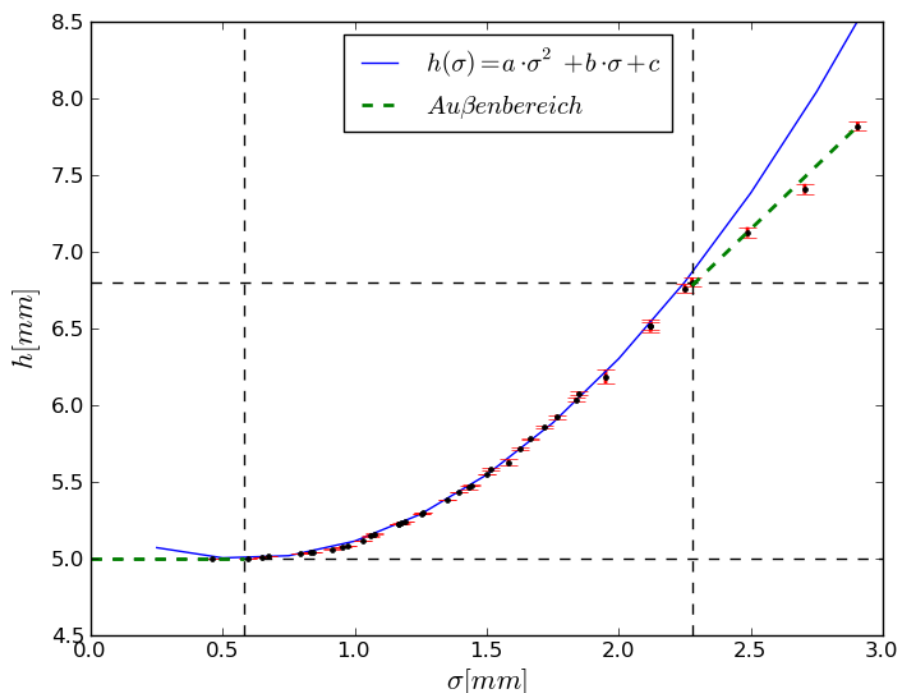


Abbildung 3.1: Skizze möglicher Näherungen außerhalb des Gültigkeitsbereichs (Grün, gestrichelt)

Als Gültigkeitsbereich für beide Abbildungen ist also der von $\sigma(h)$ (Abbildung 2.14) geeignet:

$$\sigma \in \left[\underbrace{0, 5811 \text{ mm}}_{\sigma_{min}}; \underbrace{2, 2773 \text{ mm}}_{\sigma_{max}} \right]; \text{ und } h \in \left[\underbrace{5, 0003 \text{ mm}}_{h_{min}}; \underbrace{6, 8037 \text{ mm}}_{h_{max}} \right] \quad (3.0.1)$$

An der Stelle σ_{min} hat die Funktion $h(\sigma)$ ihren Scheitelpunkt, während die Funktion $\sigma(h)$ dort das Ende ihres Definitionsbereiches besitzt. Für die Halbwertsbreite h_{min} an der Stelle gilt:

$$h_{min} = 5, 0003 \text{ mm} = c - \frac{b^2}{4 \cdot a} \quad (3.0.2)$$

Dabei sind a, b, c die bekannten Funktionsparameter aus Tabelle 2.2. Man erkennt an den Abbildungen 3.1 und 3.2, dass der Bereich links des Gültigkeitsbereichs (kleine σ) sich besser mit einer Konstanten approximieren lässt. Dies kann man sich daraus erschließen, dass bei hinreichend kleinen Streuungen der Ladungswolke diese immer auf einen einzigen Streifen landet. Die Ladungsverteilung gegen Auftreffort wird dann zu einem Dreieck, dessen Halbwertsbreite nicht variiert.

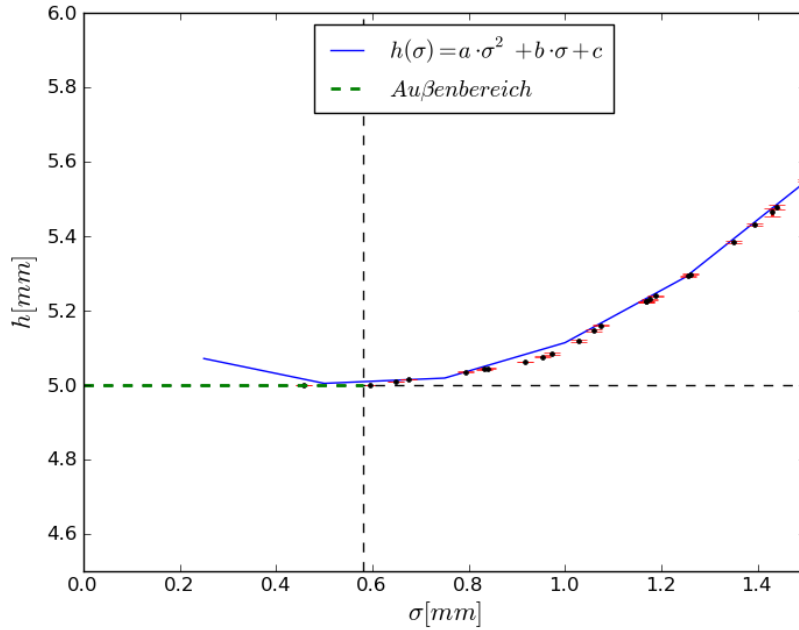


Abbildung 3.2: Skizze möglicher Näherung links des Gültigkeitsbereichs (Grün, gestrichelt)

Der Punkt mit der kleinsten Standardabweichung wurde dennoch in Abbildung 2.13 mitangepasst, da sich deswegen die Parabel stauchen lässt. So konnten mehr Punkte am rechten Rand des Gültigkeitsbereichs (größere Standardabweichungen) geeignet angepasst werden. Trotzdem konnten die 3 Punkte rechts des Gültigkeitsbereichs nicht geeignet durch den Fit approximiert werden, s. Abbildung 3.3.

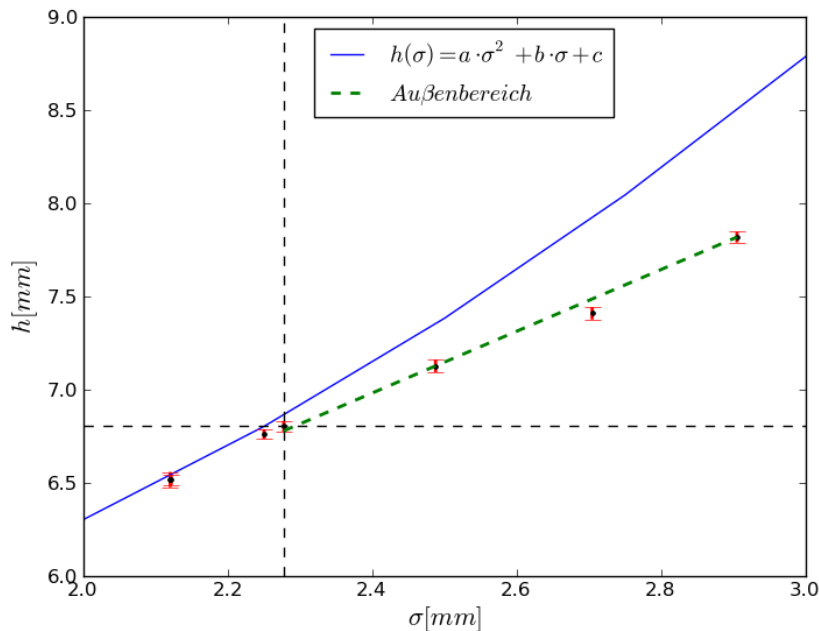


Abbildung 3.3: Skizze möglicher Näherung rechts des Gültigkeitsbereichs (Grün, gestrichelt)

Rechts des Gültigkeitsbereichs könnte sogar ein linearer Fit eine geeignete Näherung sein. Dieser müsste allerdings einen stetigen Übergang mit $h(\sigma)$ haben, genauso, wie die Konstante links des Gültigkeitsbereiches.

Die Funktionsgleichung der Geraden aus der Abbildung 3.3 lautet:

$$h(\sigma) = 1,6565 \cdot \sigma + 3,007 \quad (3.0.3)$$

Um einen stetigen Übergang von der Parabel zu der Geraden in Abbildung 3.3 zu realisieren, müssten in dem Bereich für große σ mehr Halbwertsbreiten mit deren Fehlern ermittelt werden. Durch mehr Punkte wird der lineare Fit dementsprechend präziser.

Als Fazit könnte man festhalten, dass die Fitfunktion $h(\sigma)$ aus den Abbildungen 2.13 und 3.1 - 3.3 für den in Gleichung (3.0.1) dargestellten Bereich eine geeignete Anpassung ist. Dementsprechend ist auch deren Umkehrfunktion $\sigma(h)$ in dem Bereich eine geeignete Näherung. Dies lässt sich anhand der Tabelle 2.5 bestätigen. Der Gültigkeitsbereich, also der Bereich, für den die Näherung geeignet ist, kann nicht erweitert werden.

Die Skalierung des Auftreffortes aus dem Unterkapitel 2.1.2 zeigt, dass x_{mean} aus Gleichung 2.1.2 den Schwerpunkt der Ladungswolke für kleine Driftstrecken nicht präzise genug repräsentieren könnte.

Wenn die Breite der Streifen kleiner als in Abbildung 1.2 (< 5 mm) gewählt wird, lässt sich die Verteilung der Ladungswolke auf einem einzigen Streifen mehr vermeiden. Dementsprechend wird dann die Halbwertsbreite ab einer Standardabweichung $\sigma < \sigma_{min}$ konstant. Dazu würde man allerdings eine andere Anpassungsfunktion benötigen.

4 Anhang

$d_t = 0,324 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$		
s [cm]	μ [mm]	σ_m [mm]
2	5,0	0,0(*)
4	5,0092	0,0009
6	5,0359	0,0009
8	5,0619	0,0009
9	5,0845	0,0019
11	5,1603	0,0023
13	5,2239	0,0015
15	5,2928	0,0016

Tabelle 4.1: T2K-Gas

$d_t = 0,420 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$		
s [cm]	μ [mm]	σ_m [mm]
2	5,0004	0,0002
4	5,0449	0,0009
6	5,1177	0,0029
8	5,2392	0,0014
9	5,2981	0,0015
11	5,4319	0,0023
13	5,5819	0,0093
15	5,7183	0,0096

Tabelle 4.2: Beispielgas

$d_t = 0,477 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$		
s [cm]	μ [mm]	σ_m [mm]
2	5,0157	0,0008
4	5,0766	0,0015
6	5,2239	0,0015
8	5,3843	0,0019
9	5,4645	0,0112
11	5,6255	0,0207
13	5,8561	0,0075
15	6,0772	0,0109

Tabelle 4.3: Sagox 18

$d_t = 0,588 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$		
s [cm]	μ [mm]	σ_m [mm]
2	5,0425	0,0008
4	5,2302	0,0019
6	5,4781	0,0050
8	5,7793	0,0058
9	5,9210	0,0165
11	6,1874	0,0457
13	6,5178	0,0409
15	6,8037	0,0287

Tabelle 4.4: P10

$d_t = 0,750 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$		
s [cm]	μ [mm]	σ_m [mm]
2	5,1463	0,0030
4	5,5500	0,0041
6	6,0370	0,0137
8	6,5158	0,0273
9	6,7615	0,0261
11	7,1276	0,0335
13	7,4099	0,0332
15	7,8187	0,0290

Tabelle 4.5: P5

(*): σ_m von 0 bedeutet, dass die Ladungswolke immer komplett auf einem einzigen Streifen landet und die Halbwertsbreite der Ladungsverteilung immer dieselbe ist. In Abbildung 2.13 wurde jedoch diesem Punkt ein sehr geringer Fehler, nämlich der für $s = 4$ cm ($\approx 0,0009$ mm), zugeordnet.

$d_t = 0,324 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$			$d_t = 0,420 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$			$d_t = 0,477 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$		
s [cm]	$\sigma^2(\mu)$ [mm ²]	Δ [mm ²]	s [cm]	$\sigma^2(\mu)$ [mm ²]	Δ [mm ²]	s [cm]	$\sigma^2(\mu)$ [mm ²]	Δ [mm ²]
2	-(*)	-	2	0,3730	0,0041	2	0,5182	0,0090
4	0,4491	0,0097	4	0,7131	0,0044	4	0,8508	0,0057
6	0,6617	0,0046	6	1,0206	0,0105	6	1,3714	0,0040
8	0,8093	0,0052	8	1,4251	0,0157	8	1,8324	0,0092
9	0,8729	0,0056	9	1,5887	0,0050	9	2,0665	0,0064
11	1,1562	0,0082	11	1,9310	0,0090	11	2,5432	0,0126
13	1,3630	0,0047	13	2,3179	0,0117	13	2,9912	0,0184
15	1,5793	0,0045	15	2,6892	0,0137	15	3,4750	0,0286

Tabelle 4.6: T2K-Gas

Tabelle 4.7: Beispielgas

Tabelle 4.8: Sagox 18

$d_t = 0,588 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$		
s [cm]	$\sigma^2(\mu)$ [mm ²]	Δ [mm ²]
2	0,6972	0,0048
4	1,3869	0,0078
6	2,0864	0,0063
8	2,7877	0,0249
9	3,1681	0,0294
11	3,8249	0,0510
13	4,4139	0,0448
15	5,0028	0,0602

Tabelle 4.9: P10

$d_t = 0,750 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$		
s [cm]	$\sigma^2(\mu)$ [mm ²]	Δ [mm ²]
2	1,1219	0,0100
4	2,2622	0,0104
6	3,3893	0,0260
8	4,4489	0,0628
9	4,8541	0,0777
11	5,6769	0,0753
13	6,3789	0,0926
15	7,1335	0,0889

Tabelle 4.10: P5

(*): Wie in Abbildung 2.14 dargestellt, ist $\sigma(h)$ für die hier kleinste Halbwertsbreite von 5 mm nicht gültig. Das gleiche gilt auch für $\sigma^2(h)$. Deswegen konnte dieser Punkt auch in Abbildung 2.15 nicht dargestellt werden.

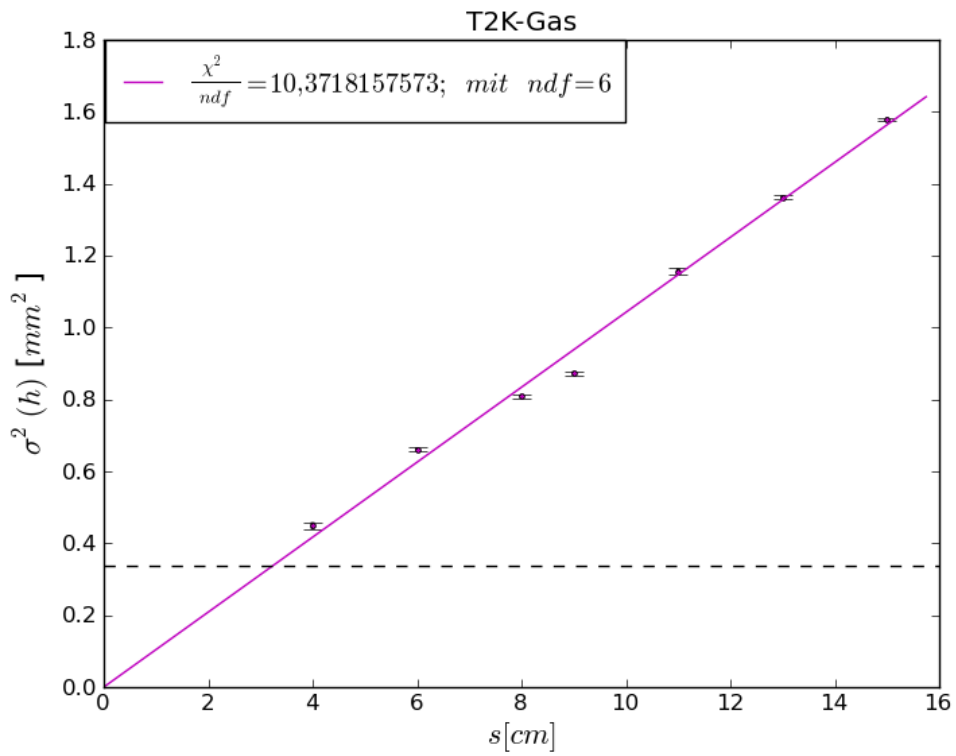


Abbildung 4.1: $d_t = 0,324 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$

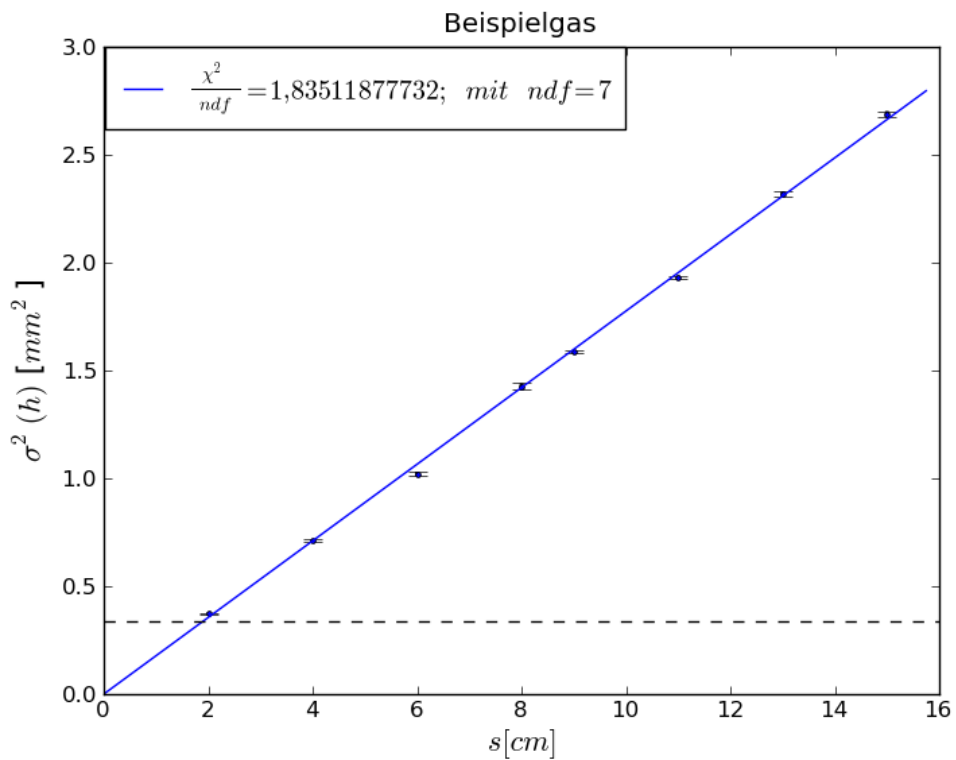


Abbildung 4.2: $d_t = 0,420 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$

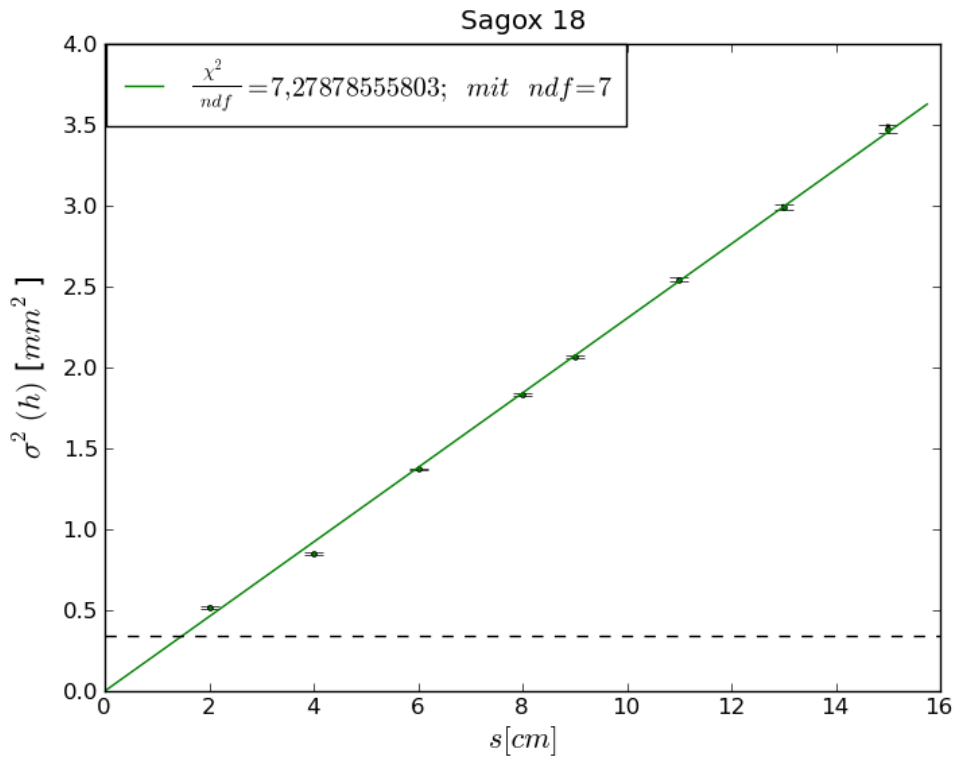


Abbildung 4.3: $d_t = 0,477 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$

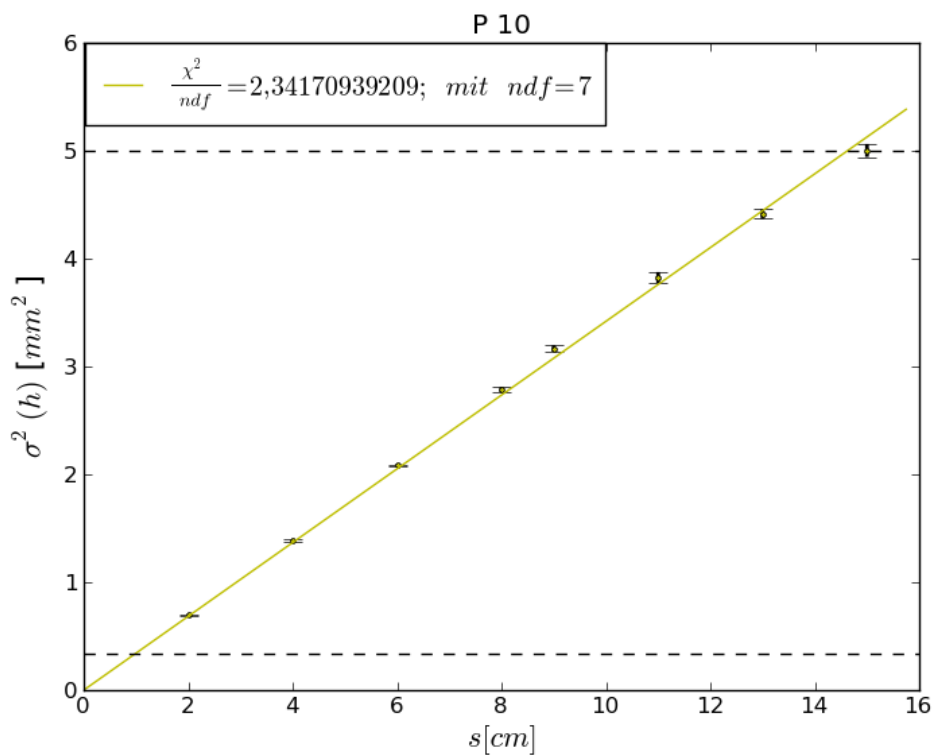


Abbildung 4.4: $d_t = 0,588 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$

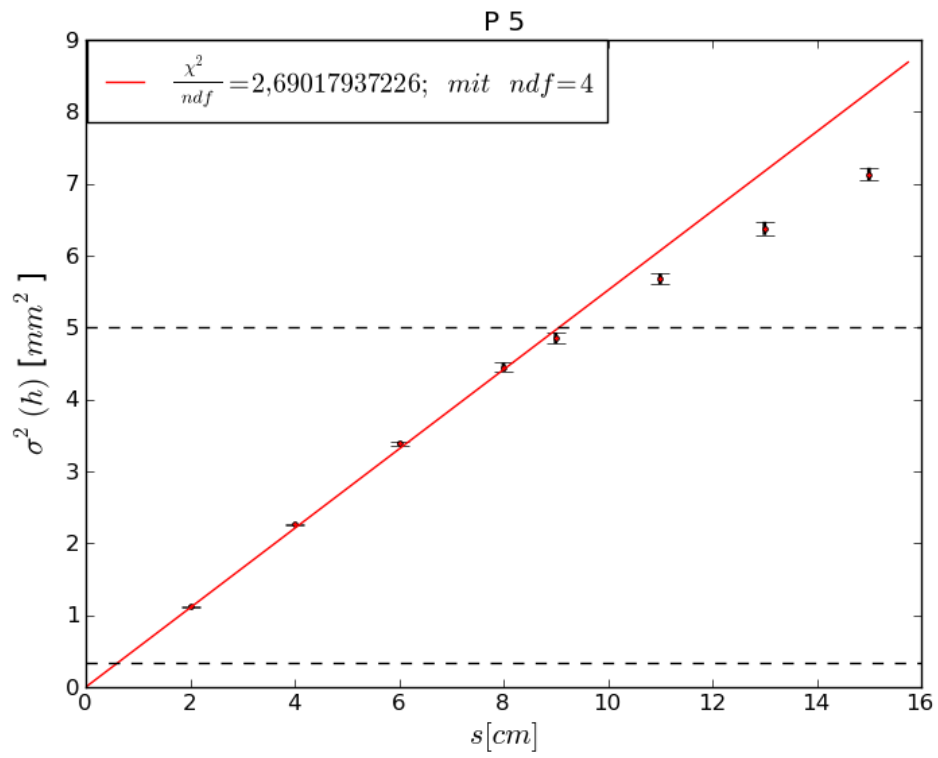


Abbildung 4.5: $d_t = 0,750 \frac{mm}{\sqrt{cm}}$

Literaturverzeichnis

- [1] CLEMENS HASLER: *Messung der longitudinalen Diffusion mit den T2K-Monitorkammern*. Bachelorarbeit, III. Physikalisches Institut B, RWTH Aachen, Juli 2015.
- [2] W. BLUM, W. RIEGLER, L. ROLANDI: *Particle Detection with Drift Chambers*. Particle Acceleration and Detection. Springer, 2008. ISBN 9783540766834.
- [3] LUKAS KOCH: *Measurement and Simulation of Drift Gas Properties*. Masterarbeit, III. Physikalisches Institut B, RWTH Aachen, 2013.
- [4] CLAUS WILHELM TURTUR: *Prüfungstrainer Physik*. Klausur- und Übungsaufgaben mit vollständigen Musterlösungen. 2. Auflage. Vieweg + Teubner, 2009. ISBN 9783834805706.
- [5] KARL BOSCH: *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Mit 82 Beispielen und 73 Übungsaufgaben mit vollständigem Lösungsweg. 11. Auflage. Vieweg + Teubner, 2011. ISBN 9783834818614.
- [6] GASDB PLOT BROWSER.
URL: <https://web.physik.rwth-aachen.de/gasDB/>.
Abrufdatum: 28.11.2017.
- [7] EXPERIMENTELLE PHYSIK UNIVERSITÄT ULM: *Mittlerer Fehler des Mittelwertes*.
URL: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/fehlerrechnung/node15.html>.
Abrufdatum: 28.11.2017.
- [8] PHYSIKALISCHES INSTITUT HEIDELBERG: *Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate*.
URL: <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/Elearning/anpassung/anpassung.php>
Abrufdatum: 30.11.2017.
- [9] PHYSIKALISCHES INSTITUT HEIDELBERG: *Eigenschaften der χ^2 -Verteilung*.
URL: https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/Elearning/anpassung/chi2verteilung_2.php.
Abrufdatum: 30.11.2017.
- [10] ULRICH KRENGEL: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 7. Auflage. Vieweg, 2003. ISBN 3528672595.

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei der T2K-Arbeitsgruppe bedanken. Für viel Geduld und Unterstützung möchte ich mich ganz besonders bei folgenden Mitarbeitern bedanken:

- Privatdozent Dr. rer. nat. Stefan Roth, Leiter der T2K-Arbeitsgruppe
- Thomas Rademacher, M. Sc.
- Dr. rer. nat. Jochen Steinmann
- Lukas Koch, M. Sc.
- Philip Hamacher-Baumann, M. Sc.

Es sind 3 Monate vergangen und ich konnte eine Menge von euch lernen.